
Question 1 [q1] Sobre as afirmações

(I) A sequência (x_n), com $x_n = \int_1^n \frac{\cos(t)}{t^2} dt$, é de Cauchy.

(II) Se $x_n \to L$, então $y_n \to L$, onde $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

(III) Se $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to L$, então $x_n \to L$.

(IV) Se $x_n = \frac{2^n}{n!}$, então $x_n \to 0$.

é correto afirmar que:

- A Nenhuma é verdadeira.
- B Somente uma é verdadeira.
- C Somente duas são verdadeiras.
- ■ Somente três são verdadeiras.
- E Todas são verdadeiras.

Question 2 [q2] Sobre as afirmações

(I) Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua, então a imagem de f é um intervalo fechado e limitado.

(II) Se $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ é contínua, então a imagem de f é um intervalo aberto.

(III) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e periódica, então f atinge seu supremo e seu ínfimo.

(IV) Se $f : [0,1] \to [0,1]$ é contínua, então f tem um ponto fixo (isto é, existe $a \in [0,1]$ tal que $f(a) = a$).

é correto afirmar que:

- A Nenhuma é verdadeira.
- B Somente uma é verdadeira.
- C Somente duas são verdadeiras.
- ■ Somente três são verdadeiras.
- E Todas são verdadeiras.

Question 3 [q3] Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, duas vezes derivável em $[0,1]$ e tal que o conjunto $\{x \in [0,1]; f(x) = 10\}$ contenha infinitos elementos. Indique a afirmação errada:

- A f não é necessariamente uma função constante.
- B A derivada de f se anula infinitas vezes.
- ■ Existe $a \in (0,1)$ tal que $f(a) = 10$ e $f'(a) = 0$.
- D O conjunto $\{x \in [0,1]; f(x) = 10\}$ é fechado.
- E A segunda derivada de f se anula infinitas vezes.

Question 4 [q4] A expansão de Taylor de ordem 8 em $x = 3$ da função

$$f(x) = \sqrt{\cos((x-3)^2)}$$

é dada por:

- ■ $1 - \frac{1}{4}(x-3)^4 - \frac{1}{96}(x-3)^8$.
- B $1 - \frac{1}{2}(x-3)^4 + \frac{1}{24}(x-3)^8$.
- C $1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8$.
- D $1 - \frac{1}{4}(x-3)^4 - \frac{1}{48}(x-3)^8$.
- E Nenhuma destas.

Question 5 [q5] Considere os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ \frac{n-1}{n}(\cos(n), \mathrm{sen}(n)) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \\ C_2 &= \{(\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t)) \ : \ t \in [0,1)\}, \\ C_3 &= \{(\cos(t), \mathrm{sen}(t\sqrt{2})) \ : \ t \in [0,1000]\}. \end{aligned}$$

- A Todos são fechados.
- B C_1 e C_2 são fechados.
- C Somente C_2 é fechado.
- D Nenhum é fechado.
- ■ A união $C_1 \cup C_2$ é fechada.

Question 6 [q6] Quanto à convergência das séries

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\pi n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\ln(n+3)},$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\ln(n+9)},$$

é correto afirmar que:

- A Somente (a) converge.
- B Somente (b) converge.
- C Somente (c) converge.
- D Somente (b) não converge.
- ■ Somente (c) não converge.

Question 7 [q7] Seja V um espaço vetorial real e $M_{10}^{sa}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{10}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$. Suponha que $T : V \to M_{10}^{sa}$ é um operador linear sobrejetor, e considere $V_1 = M_8(\mathbb{R})$, $V_2 = \mathbb{R}^{79}$, $V_3 = C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ é contínua}\}$. Quais dos espaços V_1, V_2 e V_3 podem fazer o papel de V?

- ■ Todos
- B Apenas V_1
- C Apenas V_2
- D Apenas V_3
- E Nenhum

Question 8 [q8] Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear que tem o autovalor $1/2$ associado ao autovetor $(1, -1)$ e o autovalor 3 associado ao autovetor $(1, 1)$. Então $T^{10}(5, 1)$ é

- ■ $(2^{-9} + 3^{11}, 3^{11} - 2^{-9})$.
- B $(2^{9} - 3^{11}, 3^{11} - 2^{9})$.
- C $(2^{-10} + 3^{10}, 3^{10} - 2^{-10})$.
- D $(2^{10} - 3^{10}, 3^{10} + 2^{10})$.
- E $(2^{-9} + 3^{10}, 3^{10} - 2^{-9})$.

Question 9 [q9] Considere as seguintes afirmações:
(I) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão qualquer (podendo ser infinita) e $T : V \to V$ um operador linear tal que existe um único operador linear $S : V \to V$ satisfazendo $TS = I$, sendo I o operador identidade. Então T é um isomorfismo.
(II) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e I o operador identidade em V. Então existem operadores lineares $T, S : V \to V$ tais que $TS - ST = I$.
(III) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T, S : V \to V$ operadores lineares. Então TS e ST têm os mesmos autovalores.
É correto afirmar que

- ■ (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.
- B (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.
- C (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.
- D Apenas uma afirmação é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Question 10 [q10] Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Quanto vale $\mathrm{tr}(A^{10})$?

- ■ 1025
- B 1
- C 59040
- D 13001
- E 2001

Question 11 [q11] Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear e I o operador identidade em V. Considere as seguintes afirmações:
(I) Existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que se $|\lambda| \geq \lambda_0$, então $T - \lambda I$ é um isomorfismo.
(II) Se T não tem autovalores, então T^2 também não tem autovalores.
(III) Se T é diagonalizável, então é possível definir um produto interno em V com relação ao qual T é autoadjunto.
É correto afirmar que

- ■ (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.
- B (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.
- C (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.
- D Apenas uma afirmação é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Question 12 [q12] Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T : V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:
(I) Vale apenas uma e somente uma das alternativas a seguir: dado $y \in V$, ou $Tx = y$ tem solução $x \in V$, ou $T^*z = 0$ tem solução $z \in V$ tal que $\langle y, z \rangle \neq 0$.
(II) Se T é uma isometria que deixa invariante um subespaço vetorial de V, então sua inversa deixa invariante o complemento ortogonal deste subespaço.
(III) Seja $T : V \to V$ uma isometria linear. Se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V tal que $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ é um conjunto ortonormal, então B é uma base ortonormal de V.
É correto afirmar que

- ■ Todas as afirmações são verdadeiras.
- B (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.
- C (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.
- D Apenas uma afirmação é verdadeira.
- E (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

Question 13 [q13] Seja D_4 o grupo diedral de ordem 8. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- A D_4 contém 5 subgrupos de ordem 2.
- ■ Se H é subgrupo de ordem 4, então H é um subgrupo cíclico.
- C Existem exatamente dois elementos de ordem 4 em D_4.
- D D_4 possui 6 subgrupos normais.
- E Os grupos quocientes D_4/H, onde H é normal, são isomorfos a $\{1\}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e D_4.

Question 14 [q14] Seja G um grupo finito e H um subgrupo normal tal que $G/H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ para um p primo. Considere as seguintes afirmações:

(I) Existem $x, y \in G$ tal que $xyx^{-1}y^{-1}$ não pertence a H.

(II) Se q é um primo diferente de p e $|G| = qp^2$, então H é cíclico.

(III) Existe um subgrupo M de G tal que $[G : M] = p$.

(IV) Se $|G| = 2p^2$ e K é um subgrupo de G, então $H \cap K$ é normal em G e $[G : H \cap K] \leq p^2$.

Podemos afirmar que:

- A Somente (III) é verdadeira.
- B Somente (II) é falsa.
- ■ Somente (II) e (III) são verdadeiras.
- D Somente (I) e (IV) são verdadeiras.
- E Somente (I) é verdadeira.

Question 15 [q15] Seja $A = \mathcal{C}([0,1])$ o anel das funções reais contínuas em $[0,1]$ com as operações usuais. Considere as seguintes afirmações:

(i) A é um domínio de integridade.

(ii) Se $a \in [0,1]$, então $\mathfrak{m}_a = \{f \in A \mid f(a) = 0\}$ é um ideal maximal de A.

(iii) $F : A \to \mathbb{R}$ definida por $F(f) = f(0)$ é um homomorfismo de anéis.

(iv) $I = \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_1 = \{f \in A \mid f(0) = f(1) = 0\}$ é um ideal primo de A.

É correto dizer que

A são verdadeiras (ii) e (iv).

B são verdadeiras (i) e (iv).

C são falsas (ii) e (iv).

D são falsas (i) e (iii).

[redacted] são verdadeiras (ii) e (iii).

Question 16 [q16] Seja n o número de grupos abelianos de ordem 2024 a menos de isomorfismo. Qual alternativa é certa?

A $n = 5$.

B $n = 4$.

[redacted] $n = 3$.

D $n = 2$.

E $n = 1$.

Question 17 [q17] Sejam $A = \mathbb{R}[X]$ e I um ideal de A gerado por um polinômio de grau 2024 que não tem raiz real e com raízes complexas distintas. Indique a alternativa correta.

A $A/I \simeq \mathbb{R}^{2024}$

B $A/I \simeq \mathbb{C}^{2024}$

C $A/I \simeq \mathbb{R}^{1012}$

[redacted] $A/I \simeq \mathbb{C}^{1012}$

E $A/I \simeq \mathbb{R}^{1012} \times \mathbb{C}^{1012}$

Question 18 [q18] Indique a alternativa correta.

A A aplicação $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{3}$, é um isomorfismo de anéis.

B O anel $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tem um ideal primo que não é maximal.

C O anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tem um número finito de ideais maximais.

D Os grupos $(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])^{\times}$ e $(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])^{\times}$ não são isomorfos. Aqui, para um anel A, $A^{\times}$ é o grupo das unidades de A.

[redacted] $\mathbb{Z}[X]/\langle 3, X^2 - 1\rangle$ é um anel finito.