
Question 1 [q1] Sobre las afirmaciones

(I) La sucesión (x_n), con $x_n = \int_1^n \frac{\cos(t)}{t^2} dt$, es de Cauchy.

(II) Si $x_n \to L$, entonces $y_n \to L$, donde $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

(III) Si $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to L$, entonces $x_n \to L$.

(IV) Si $x_n = \frac{2^n}{n!}$, entonces $x_n \to 0$.

es correcto afirmar que:

A Ninguna es verdadera.

B Solamente una es verdadera.

C Solamente dos son verdaderas.

[redacted] Solamente tres son verdaderas.

E Todas son verdaderas.

Question 2 [q2] Sobre las afirmaciones

(I) Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces la imagen de f es un intervalo cerrado y acotado.

(II) Si $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces la imagen de f es un intervalo abierto.

(III) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es contínua y periódica, entonces f alcanza su supremo y su ínfimo.

(IV) Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es contínua, entonces f tiene un punto fijo (esto es, existe $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = a$).

es correcto afirmar que:

A Ninguna es verdadera.

B Solamente una es verdadera.

C Solamente dos son verdaderas.

[redacted] Solamente tres son verdaderas.

E Todas son verdaderas.

Question 3 [q3] Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dos veces derivábe en $[0, 1]$ y tal que el conjunto $\{x \in [0, 1]; f(x) = 10\}$ contenga infinitos elementos. Indique la afirmación incorrecta:

A f no es necesariamente una función constante.

B La derivada de f se anula infinitas veces.

[redacted] Existe $a \in (0, 1)$ tal que $f(a) = 10$ y $f'(a) = 0$.

D El conjunto $\{x \in [0, 1]; f(x) = 10\}$ es cerrado.

E La segunda derivada de f se anula infinitas veces.

Question 4 [q4] La expansión de Taylor de orden 8 en $x = 3$ de la función

$$f(x) = \sqrt{\cos((x-3)^2)}$$

es dada por:

[redacted] $1 - \frac{1}{4}(x-3)^4 - \frac{1}{96}(x-3)^8$.

B $1 - \frac{1}{2}(x-3)^4 + \frac{1}{24}(x-3)^8$.

C $1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8$.

D $1 - \frac{1}{4}(x-3)^4 - \frac{1}{48}(x-3)^8$.

E Ninguna de estas.

Question 5 [q5] Considere los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ \frac{n-1}{n}(\cos(n), \operatorname{sen}(n)) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \\ C_2 &= \{(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \ : \ t \in [0, 1)\}, \\ C_3 &= \{(\cos(t), \operatorname{sen}(t\sqrt{2})) \ : \ t \in [0, 1000]\}. \end{aligned}$$

A Todos son cerrados.

B C_1 y C_2 son cerrados.

C Solamente C_2 es cerrado.

D Ninguno es cerrado.

[redacted] La union $C_1 \cup C_2$ es cerrada.

Question 6 [q6] Cuanto a la convergencia de las séries

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\pi n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\ln(n+3)},$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\ln(n+9)},$$

es correcto afirmar que:

A Solamente (a) converge.

B Solamente (b) converge.

C Solamente (c) converge.

D Solamente (b) no converge.

[redacted] Solamente (c) no converge.

Question 7 [q7] Sea V un espacio vectorial real y $M_{10}^{sa}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{10}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$. Suponga que $T : V \to M_{10}^{sa}$ es un operador lineal sobrejector, y considere $V_1 = M_8(\mathbb{R})$, $V_2 = \mathbb{R}^{79}$, $V_3 = C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es contínua}\}$. Cuales de los espacios V_1, V_2 y V_3 pueden hacer el papel de V?

[redacted] Todos

B Apenas V_1

C Apenas V_2

D Apenas V_3

E Ninguno

Question 8 [q8] Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal que tiene el autovalor $1/2$ asociado al autovector $(1, -1)$ y el autovalor 3 asociado al autovector $(1, 1)$. Entonces $T^{10}(5, 1)$ es

[redacted] $(2^{-9} + 3^{11}, 3^{11} - 2^{-9})$.

B $(2^9 - 3^{11}, 3^{11} - 2^9)$.

C $(2^{-10} + 3^{10}, 3^{10} - 2^{-10})$.

D $(2^{10} - 3^{10}, 3^{10} + 2^{10})$.

E $(2^{-9} + 3^{10}, 3^{10} - 2^{-9})$.

Question 9 [q9] Considere las siguientes afirmaciones:
(I) Sean V un espacio vectorial real de dimensión arbitrária (podiendo ser infinita) y $T : V \to V$ un operador lineal tal que existe un único operador lineal $S : V \to V$ satisfaciendo $TS = I$, siendo I el operador identidad. Entonces T es un isomorfismo.
(II) Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y I el operador identidad en V. Entonces existen operadores lineales $T, S : V \to V$ tales que $TS - ST = I$.
(III) Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y $T, S : V \to V$ operadores lineales. Entonces TS y ST tienen los mismos autovalores.
Es correcto afirmar que

[redacted] (I) y (III) son verdaderas y (II) es falsa.

B (II) y (III) son verdaderas y (I) es falsa.

C (I) y (II) son verdaderas y (III) es falsa.

D Apenas una afirmación es verdadera.

E Todas las afirmaciones son verdaderas.

Question 10 [q10] Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Cual es el valor de $\mathrm{tr}(A^{10})$?

[redacted] 1025

B 1

C 59040

D 13001

E 2001

Question 11 [q11] Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal y I el operador identidad en V. Considere las siguientes afirmaciones:
(I) Existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que si $|\lambda| \geq \lambda_0$, entonces $T - \lambda I$ es un isomorfismo.
(II) Si T no tiene autovalores, entonces T^2 tambiem no tiene autovalores.
(III) Si T es diagonalizável, entonces es posible definir un producto interno en V con relación al cual T es autoadjunto.
Es correcto afirmar que

[redacted] (I) y (III) son verdaderas y (II) es falsa.

B (II) y (III) son verdaderas y (I) es falsa.

C (I) y (II) son verdaderas y (III) es falsa.

D Apenas una afirmación es verdadera.

E Todas las afirmaciones son verdaderas.

Question 12 [q12] Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interno y $T : V \to V$ un operador lineal. Considere las siguientes afirmaciones:
(I) Vale apenas una y solamente una de las alternativas a seguir: dado $y \in V$, o $Tx = y$ tiene solución $x \in V$, o $T^*z = 0$ tiene solución $z \in V$ tal que $\langle y, z \rangle \neq 0$.
(II) Si T es una isometria que deja invariante un subespacio vectorial de V, entonces su inversa deja invariante el complemento ortogonal de este subespacio.
(III) Sea $T : V \to V$ una isometria lineal. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V tal que $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es un conjunto ortonormal, entonces B es una base ortonormal de V.
Es correcto afirmar que

[redacted] Todas las afirmaciones son verdaderas.

B (II) y (III) son verdaderas y (I) es falsa.

C (I) y (II) son verdaderas y (III) es falsa.

D Apenas una afirmación es verdadera.

E (I) y (III) son verdaderas y (II) es falsa.

Question 13 [q13] Sea D_4 el grupo diedral de orden 8. Cual de las siguientes afirmaciones es falsa?

A D_4 contiene 5 subgrupos de orden 2.

[redacted] Si H es subgrupo de orden 4, entonces H es un subgrupo cíclico.

C Existem exactamente dos elementos de orden 4 en D_4.

D D_4 posee 6 subgrupos normales.

E Los grupos cocientes D_4/H, donde H es normal, son isomorfos a $\{1\}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y D_4.

Question 14 [q14] Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal tal que $G/H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ para un p primo. Considere las siguientes afirmaciones:

(I) Existen $x, y \in G$ tal que $xyx^{-1}y^{-1}$ no pertenece a H.

(II) Si q es un primo diferente de p y $|G| = qp^2$, entonces H es cíclico.

(III) Existe un subgrupo M de G tal que $[G : M] = p$.

(IV) Si $|G| = 2p^2$ y K es un subgrupo de G, entonces $H \cap K$ es normal en G y $[G : H \cap K] \leq p^2$.

Podemos afirmar que:

A Solamente (III) es verdadera.

B Solamente (II) es falsa.

[redacted] Solamente (II) y (III) son verdaderas.

D Solamente (I) y (IV) son verdaderas.

E Solamente (I) es verdadera.

Question 15 [q15] Sea $A = \mathcal{C}([0,1])$ el anilo de las funciones reales contínuas en $[0,1]$ con las operaciones usuales. Considere las siguientes afirmaciones:

(i) A es un domínio de integridad.

(ii) Si $a \in [0,1]$, entonces $\mathfrak{m}_a = \{f \in A \,|\, f(a) = 0\}$ es un ideal maximal de A.

(iii) $F : A \to \mathbb{R}$ definida por $F(f) = f(0)$ es un homomorfismo de anillos.

(iv) $I = \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_1 = \{f \in A \,|\, f(0) = f(1) = 0\}$ es un ideal primo de A.

Es correcto decir que

- A son verdaderas (ii) y (iv).
- B son verdaderas (i) y (iv).
- C son falsas (ii) y (iv).
- D son falsas (i) y (iii).
- [redacted] son verdaderas (ii) y (iii).

Question 16 [q16] Sea n el número de grupos abelianos de orden 2024 a menos de isomorfismo. Cual alternativa es correcta?

- A $n = 5$.
- B $n = 4$.
- [redacted] $n = 3$.
- D $n = 2$.
- E $n = 1$.

Question 17 [q17] Sean $A = \mathbb{R}[X]$ y I un ideal de A generado por un polinomio de grado 2024 que no tiene raiz real y con raízes complejas distintas. Indique la alternativa correcta.

- A $A/I \simeq \mathbb{R}^{2024}$
- B $A/I \simeq \mathbb{C}^{2024}$
- C $A/I \simeq \mathbb{R}^{1012}$
- [redacted] $A/I \simeq \mathbb{C}^{1012}$
- E $A/I \simeq \mathbb{R}^{1012} \times \mathbb{C}^{1012}$

Question 18 [q18] Indique a alternativa correcta.

- A La aplicación $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{3}$, es un isomorfismo de anillos.
- B El anillo $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tiene un ideal primo que no es maximal.
- C El anillo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tiene un número finito de ideales maximales.
- D Los grupos $(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])^\times$ y $(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])^\times$ no son isomorfos. Aqui, para un anillo A, $A^\times$ es el grupo de las unidades de A.
- [redacted] $\mathbb{Z}[X]/\langle 3, X^2 - 1\rangle$ es un anillo finito.