Examen Extramuros 2024 - Doctorado

Observación: Este examen tiene una duración de cinco (5) horas

Ejercicio 1. (1p) Indique verdadero o falso en cada afirmación.

(a) Sea $a_n \geq 0$ tal que $a_{n+k} \leq a_n + a_k$. Entonces la secuencia $\frac{a_n}{n}$ converge.

(b) Si $\sum x_n$ converge y $|x_n|$ es decreciente entonces $\sum \sin(x_n)$ no converge.

Solución: (a) Verdadero: converge. Note que $n = kp + r$ entonces $a_n/n \leq ka_p/n + a_r/n$ por lo tanto $\limsup a_n/n \leq \liminf a_n/n$
(b) Falso: converge. $\sin x_n = (\frac{\sin |x_n|}{|x_n|})x_n$. El paréntesis es monótona acotada y $\sum x_n$ converge. use el teorema de Abel.

Ejercicio 2. (1p) Sea P el conjunto de los primos mayores que 2. El radio de convergencia de la serie $\sum_{p\in P} x^p$ es:

(a) cero (b) mayor que 1 (c) igual a 1 (d) menor o igual que 1

Solución:
R: (c) y (d) Verdaderos y los otros falsos, pues $|a_n x^n| \leq |x^n|$.

Ejercicio 3. (1.5p) Indique verdadero o falso en cada afirmación.

(a) Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(0) = 0$ pero $f'(x) \geq 1$ si $x \neq 0$.

(b) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx}$ converge uniformemente en $[0, \infty)$.

(c) Existe una función en la recta, periódica, C^∞ tal que sus derivadas $f^{(n)}$ forman una secuencia no acotada (en la norma del máximo).

Solución: (a) Falso. Use el teorema del valor medio y pase el límite para $h \to 0$ usando solamente la desigualdad ≥ 1.
(b) Falso. Tome $\epsilon = 1/1 + \pi/2$ y $x_n = \pi/2n$.
(c) Verdadero, $f(x) = \sin(2x)$.

Ejercicio 4. (1.5p) Sea $\| \, \|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, y $B \subset \mathbb{R}^n$. Llamamos distancia de a a B al número $d(a, B) = \inf_{y\in B} \|a - y\|$. Suponga que para cada entero $n > 0$ existe un elemento $y_n \in B$ tal que $\|a - y_n\| \leq d(a, B) + \frac{1}{n}$. Indique verdadero o falso en cada afirmación siguiente.

(a) Si B es cerrado, entonces no existe $b \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$.

(b) Si B es acotado, entonces existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$.

(c) Si B es compacto, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$.

Solución: (a) Falso, (b) Verdadero, (c) Verdadero.

Caso 1 Suponga que B es compacto. En este caso podemos extraer de la secuencia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia convergente $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Denotamos $z_n = y_{\varphi(n)}$, y sea $b \in B$ el límite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos a usar que la aplicación $x \to d(a, x)$ es continua. Como z_n converge a b, tenemos que $d(a, z_n)$ converge a $d(a, b)$. Pasando al límite en la desigualdad $d(a, B) \leq d(a, z_n) \leq d(a, B) + \frac{1}{\varphi(n)}$, obtenemos que $d(a, B) \leq d(a, b) \leq d(a, B)$, es decir $d(a, b) = d(a, B)$.

Caso 2 Suponga que B es acotado, es decir B está contenido en una bola K, que podemos tomar cerrada, por lo tanto compacta. Note que los y_n están en el compacto K y por lo tanto podemos razonar como en el caso anterior. Podemos extraer una secuencia $z_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $b \in K$ (pero no necesariamente en B). Se sigue por el mismo argumento que $d(a, b) = d(a, B)$.

Caso 3 Suponga que B es cerrado. Note que para $n > 1$ los y_n están en una bola cerrada de centro a y radio $d(a, B) + 1$, por lo tanto están en la intersección de esta bola con B, que es cerrado y acotado. Por lo tanto estamos en la situación de un compacto contenido en B, y podemos razonar como en el Caso 1.

Ejercicio 5. (2p) La relación $x+y+z+\operatorname{sen}(xyz)=0$ permite definir z como función de x e y en la vecindad del punto $(0,0,\frac{\pi}{2})$:

(a) Sí, (b) No,

(c) Sí y $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-1$, (d) Sí y $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=1$

Solución: (a) Falso, (b) Verdadeiro, (c) Falso, (d) Falso.
Sea $f(x,y,z)=x+y+z+\operatorname{sen}(xyz)$. Note que $f(0,0,\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\neq 0$, entonces, el punto $(0,0,\frac{\pi}{2})$ no pertenece al conjunto de soluciones de la ecuación $f(x,y,z)=0$. En particular, esta relación no permite definir z como función de x,y en un entorno del punto dado.

Ejercicio 6. (1.5p) Sea $C\in\mathbb{R}$ una constante, y $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$0\leq f(x)\leq C\int_0^x f(t)dt, \qquad \forall x\in[0,1].$$

Podemos afirmar que:

(a) f se anula en algún punto del intervalo $(0,1)$.

(b) f es estrictamente positiva en el intervalo $[0,1]$.

(c) f es idénticamente nula en el intervalo $[0,1]$.

Solución: (a) Verdadero, (b) Falso, (c) Verdadero.
La función $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, es una primitiva de f en $[0,1]$, por lo que F es una función diferenciable en este intervalo. Para todo $x\in[0,1]$ tenemos que:

$$\left(F(x)e^{-Cx}\right)'=F'(x)e^{-Cx}-CF(x)e^{-Cx}=e^{-Cx}\left(f(x)-CF(x)\right).$$

Se sigue de la desigualdad $0\leq f(x)\leq C\int_0^x f(t)dt$ que $\left(F(x)e^{-Cx}\right)'$ es negativa en $[0,1]$. Por lo tanto, la función $x\to F(x)e^{-Cx}$ es decreciente en este intervalo. Alcanza en $x=0$ su valor máximo, que es 0, por lo que $F(x)e^{-Cx}\leq 0$, $\forall x\in[0,1]$. Se sigue que $F(x)\leq 0$. Por hipótesis, $F(x)\geq 0$, por lo que $F(x)=0$ en $[0,1]$. De esto concluimos que f es idénticamente nula en $[0,1]$.

Ejercicio 7. (2p) Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función diferenciable y $\Sigma=\phi^{-1}(c)\subset\mathbb{R}^3$ el subconjunto definido por un valor regular c de $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Considere la restricción $f:=F|_\Sigma$ y decida verdadero o falso en cada afirmación.

(a) El gradiente de F en $x\in\Sigma$ es perpendicular al plano tangente a Σ en x.

(b) $x\in\Sigma$ es un punto crítico de f si y solo si el gradiente de F en $x\in\Sigma$ es perpendicular al plano tangente a Σ en x.

(c) $x\in\Sigma$ es un punto crítico de f si y solo si el gradiente de F en $x\in\Sigma$ es paralelo al gradiente de ϕ en x.

(d) Si $\phi=(\phi_1,\phi_2):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $c\in\mathbb{R}^2$ es un valor regular de ϕ y $f=F|_{\phi^{-1}(c)}$, un punto crítico $x\in\phi^{-1}(c)$ de f es tal que ambos productos escalares siguientes son cero, $\nabla F(x)\cdot\nabla\phi_1(x)=0$ y $\nabla F(x)\cdot\nabla\phi_2(x)=0$.

Solución: (a) Falso. Esto es porque $x\in\Sigma$ puede ser cualquier punto. Por ejemplo, si $\phi(x_1,x_2,x_3)=x_1$ y $c=0$, tenemos que $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ es el plano $x_1=0$. Tomando $F(x_1,x_2,x_3)=x_2$, el gradiente es $\nabla F=(0,1,0)$ en cualquier punto que no es perpendicular a Σ.

(b) Verdadero. Todo vector tangente a Σ en x puede ser obtenido como $v=\frac{d}{dt}\gamma(t=0)$ para una curva suave $t\mapsto\gamma(t)\in\Sigma$ con $\gamma(0)=x$. Entonces,

$$df|_x(v)=\nabla F(x)\cdot v=\frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))|_{t=0}.$$

Por otro lado, f tiene un punto crítico en x si $f(\gamma(t))$ posee un punto crítico en $t=0$ para toda tal curva γ, lo cual ocurre $\iff$ $\nabla F(x)\cdot v=0$ para todo v tangente a Σ en x.

(c) Verdadero. Análogamente al punto anterior, tenemos $\nabla\phi(x)\cdot v=0$ para cualquier $x\in\Sigma$ y cualquier tangente v a Σ en x, ya que $\phi(\gamma(t))=c$ constante cuando $\gamma(t)\in\Sigma$. Como c es un valor regular, $\nabla\phi(x)\neq 0$ es un vector que genera la dirección normal al plano tangente a Σ en x. Por lo tanto, por el ítem (b), x punto crítico de f $\iff$ $\nabla F(x)$ es un múltiplo de $\nabla\phi(x)$.

(d) Falso. Notamos que Σ será una curva en este caso. Análogamente al punto (c), $\nabla\phi_1(x)$ y $\nabla\phi_2(x)$ son vectores perpendiculares a la recta tangente a Σ en cualquier $x \in \Sigma$. Si $x \in \Sigma$ es crítico para f, entonces $\nabla F(x)$ es también un vector perpendicular a la recta tangente a Σ en x. Por lo tanto, $\nabla F(x)$ debe ser una combinación lineal de los vectores $\nabla\phi_1(x), \nabla\phi_2(x)$, pero los coeficientes de esta combinación no necesitan ser cero.

Ejercicio 8. (2p) Considere $Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ el conjunto de matrices 3×3 reales y el subconjunto

$$G = \{R \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) : \langle Rv, Rw\rangle = \langle v, w\rangle,\ \forall v, w \in \mathbb{R}^3\}.$$

Sea $I = [-\epsilon, \epsilon]$ y $I \ni t \mapsto R(t) \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ una curva C^1 tal que $R(t) \in G$ para todo $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Las derivadas $\frac{d}{dt}R(t)$ se toman en cada entrada de la matriz. Indique verdadero o falso en cada afirmación a continuación.

(a) $\frac{d}{dt}R|_{t=0}$ es una matriz antisimétrica.

(b) $R(t)^T \cdot (\frac{d}{dt}R(t))$ es una matriz antisimétrica para todo $t \in I$, donde ^{T} denota la matriz transpuesta y $\cdot$ es el producto de matrices.

(c) Si $U \subset Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ es un abierto tal que $G \cap U = \phi^{-1}(c)$ (no vacío) para $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ una función suave que es una submersión, entonces k debe ser 3.

(d) Si $U \subset Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ es un abierto tal que $G \cap U = \phi^{-1}(c)$ (no vacío) para $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ una función suave que es una submersión, entonces k debe ser 6.

Solución: (a) Falso. Esto es porque $R(0)$ puede ser cualquier punto de G. Por ejemplo, una rotación

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \operatorname{sen}(\theta(t)) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + t$ tiene derivada

$$\frac{d}{dt}R|_{t=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es antisimétrica.

(b) Verdadera. Derivando ambos lados de la ecuación que define que $R(t)$ está en G, obtenemos

$$\langle \frac{dR}{dt}(t)v, R(t)w\rangle + \langle R(t)v, \frac{dR}{dt}(t)w\rangle = 0$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$. Se sigue que

$$\left(\frac{dR}{dt}(t)\right)^T \cdot R(t) + R(t)^T \cdot \frac{dR}{dt}(t) = 0, \forall t \in I.$$

Como $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ y $(A^T)^T = A$, la identidad anterior dice que $R(t)^T \cdot (\frac{d}{dt}R(t))$ es antisimétrica.

(c) Falso. Considerando ϕ como en el enunciado, si tomamos una curva suave $R(t) \in G \cap U$, por el ítem (b), tendremos que $A(t) = R(t)^T \cdot (\frac{d}{dt}R(t))$ es antisimétrica. Notamos que $R^T = R^{-1}$ para todo $R \in G$, por la definición de G. Se sigue que cualquier vector tangente $v \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ a G en un punto $R \in G \cap U$ será de la forma $v = R \cdot A$ para alguna matriz antisimétrica $A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$. Como el espacio vectorial de matrices antisimétricas 3×3 tiene dimensión 3, significa que el espacio tangente a G en tal R tiene dimensión 3. Por otro lado, como $G \cap U = \phi^{-1}(c)$ con $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ siendo una submersión, el espacio tangente debe tener dimensión $(dim.\ ambiente) - k = 9 - k$. Finalmente, debemos tener $9 - k = 3$, o sea, $k = 6$.

(d) Verdadero, por lo explicado arriba.

Ejercicio 9. (2p) Considere un campo $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ de clase C^2 con dominio dado por todos los vectores menos el origen, $D = \mathbb{R}^n \setminus 0$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Si $n = 2$ y $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$ en todos los puntos de D, entonces $F = \nabla f$ es el gradiente de alguna función $f : D \to \mathbb{R}$.

(b) Si $n = 3$ y $rot(F) = 0$ (el rotacional de F es cero) en todos los puntos de D, entonces $F = \nabla f$ es el gradiente de alguna función $f : D \to \mathbb{R}$.

(c) Si $n = 3$ y $div(F) = 0$ (la divergencia de F es cero) en todos los puntos de D, entonces la integral $\int_S F \cdot dS$ sobre cualquier superficie cerrada S en D toma el valor cero.

(d) Si $n = 3$ y $div(F) = 0$ (la divergencia de F es cero) en todos los puntos de D, entonces la integral $\int_{S_r} F \cdot dS$ sobre cualquier esfera $S_r \subset \mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$ (centrada en el origen y con la orientación estándar) toma el mismo valor.

Solución: (a) Falso. Esto es porque $D = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ no es simplemente conexo, así que la integral de línea $I = \int_C F \cdot dl$ sobre un camino cerrado que da una vuelta alrededor del origen puede no ser cero. Por ejemplo, si $F(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2, x_1)$ y C es dado por $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t)), t \in [0, 2\pi]$, entonces $I = 2\pi \neq 0$. Pero $I = 0$ es una condición necesaria para tener $F = \nabla f$.

(b) Verdadero. La idea es que $D = \mathbb{R}^3 \setminus 0$ es simplemente conexo y podemos definir $f(x) = \int_C F \cdot dl$ como la integral de línea para cualquier camino C en D que conecta un punto de referencia $x_0 \in D$ a $x \in D$. Como todo tal par de caminos C_1 y C_2 en D constituye el borde de una superficie S en D, $\partial S = C_1 \cup (-C_2)$, por el teorema de Stokes tendremos $\int_{C_1} F dl - \int_{C_2} F dl = \int_S rot(F) dS = 0$, demostrando que f queda bien definida. El hecho de que $F = \nabla f$ sigue del teorema fundamental del cálculo de manera estándar.

(c) Falso. El problema ocurre cuando la superficie cerrada S es el borde de una región $V \subset \mathbb{R}^3$ que contiene el origen, $0 \in V$. En tal caso, no podemos aplicar el teorema de la divergencia para aprovechar la hipótesis $div(F) = 0$. Un contraejemplo es $F(x) = \frac{1}{\|x\|^3} x$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ la esfera de radio 1, obteniendo $\int_S F \cdot dS = 4\pi \neq 0$.

(d) Verdadero. La idea es usar el teorema de la divergencia. Dados $r_2 > r_1 > 0$, consideramos la región V encerrada entre las esferas S_{r_1} y S_{r_2}, tal que $\partial V = S_{r_2} \cup (-S_{r_1})$ y entonces

$$\int_{S_{r_2}} F \cdot dS - \int_{S_{r_1}} F \cdot dS = \int_V div(F) dV = 0.$$

Ejercicio 10. (1.5p) En relación al sistema no lineal de incógnitas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ siguiente

$$\begin{cases} 2x^3 + y^3 + z + e^{-x^3-y^3} &= 1, \\ x^6 - 3y^6 + 5y^3 + \cos(x^3 + y^3 + z) &= 1, \end{cases}$$

puede afirmar que:

(a) El sistema no tiene solución.

(b) El sistema tiene solución única.

(c) El sistema tiene infinitas soluciones.

Solución: Notemos que el punto $(0, 0, 0)$ es solución del sistema, por lo que (a) es falso.
Por otro lado, haciendo el cambio de variables $u = x^3$ y $v = y^3$, el sistema se convierte en

$$\begin{cases} 2u + v + z + e^{-u-v} &= 1, \\ u^2 - 3v^2 + 5v + \cos(u + v + z) &= 1, \end{cases}$$

y la función

$$F(u, v, z) = (2u + v + z + e^{-u-v}, u^2 - 3v^2 + 5v + \cos(u + v + z))$$

es de clase C^1, y satisface $F(0, 0, 0) = (1, 1)$.
Notemos que

$$\begin{aligned} D_{(u,v)}F(0,0,0) &= \left.\begin{bmatrix} 2 - e^{-u-v} & 1 - e^{-u-v} \\ 2u - \sin(u + v + z) & -6v + 5 - \sin(u + v + z) \end{bmatrix}\right|_{(0,0,0)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo que es invertible. Por el T.F.I., tenemos que existe una función $z \mapsto (u(z), v(z))$ de clase $C^1(-\epsilon, \epsilon)$ para cierto $\epsilon > 0$ tal que

$$F(u(z), v(z), z) = (1, 1),$$

para todo $|z| < \epsilon$. Así, usando que $x(z) = \sqrt[3]{u(z)}$ y $y(z) = \sqrt[3]{v(z)}$, obtenemos infinitas soluciones para el sistema original. Por lo tanto, (b) es falso, y la única respuesta verdadera es (c).

Ejercicio 11. (1.5p) Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Indique verdadero o falso en cada afirmación a seguir.

(a) Si f es lineal e inyectiva, entonces $n=1$.

(b) Para $n>1$, hay funciones f tales que para cada $y \in \mathbb{I}m(f)$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)=y\}$ es finito.

(c) Si $n>1$, entonces f no puede ser inyectiva.

Solución: La respuesta (a) es verdadera por el Teorema del Núcleo-Imágen.
Por otro lado, si $n>1$ y f no es constante, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_{x_i}(x_0) \neq 0$ (derivada parcial) para cierto $i=1,...,n$. Podemos asumir que $i=1$ y podemos escribir $x_0=(x_0^1, x_0')$ con $x_0^1 \in \mathbb{R}$ y $x_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si $z_0 = f(x_0)$, por el T.F.I. tenemos una vecindad $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ del punto x_0' y una función $x' \mapsto x_0^1(x)$ de clase $C^1(V)$ tal que

$$f(x_0^1(x'), x') = z_0, \quad \text{para todo } x' \in V,$$

por lo que (c) es cierto. Note que si (b) fuera verdadera, por (c) necesariamente $Df \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n$, por lo que f es constante y llegamos a una contradicción.

Ejercicio 12. (2p) El valor de la integral

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dxdy$$

es:

(a) $14/3$.

(b) $12/7$.

(c) $\pi/7$.

(d) $1/7$.

Solución: Aplicamos Fubini sobre la región

$$A = \{(x,y) : y \in [0,8],\ x \in [\sqrt[3]{y}, 2]\},$$

que puede ser descrita como

$$A = \{(x,y) : x \in [0,2],\ y \in [0,x^3]\}.$$

Así

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dydx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16+x^7}} \int_0^{x^3} ydydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^6}{\sqrt{16+x^7}} dx \\
&= \frac{1}{14}\int_0^2 \frac{7x^6}{\sqrt{16+x^7}} dx \\
&= \frac{1}{14}\int_0^{144} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{12}{7}.
\end{aligned}$$

Cómo llenar la hoja de respuestas. Por favor, complete los datos de identificación y marque claramente las cajas con las respuestas elegidas. En caso de un error: solicite una nueva hoja de respuestas o coloque una nota al pie con la respuesta deseada.

Puntuación. La puntuación de una pregunta se determina por la fórmula

$$\text{(puntuación máxima)} \times \max\{\ 0,\ \frac{(\#\ \text{respuestas correctas}) - (\#\text{respuestas incorrectas})}{(\#\text{respuestas})}\ \}.$$

Ejemplo: En el caso de una pregunta con 3 puntos, 2 respuestas correctas, una incorrecta y tres indecisas, la puntuación final es 3 x (2-1)/6 = 0.5.

Examen Extramuros 2024 - Doctorado

Identificación y respuestas

Nombre: ______________________

Identificación ☐ Pasaporte ☐ Cédula de identidad

Número de identificación: ______________________

Institución de aplicación: ______________________

Firma: ______________________

Respuesta 1 (1p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 2 (1p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(d) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 3 (1.5p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 4 (1.5p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 5 (2p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(d) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 6 (1.5p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 7 (2p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(d) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 8 (2p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(d) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 9 (2p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(d) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 10 (1.5p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 11 (1.5p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé

Respuesta 12 (2p)
(a) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(b) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(c) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé
(d) ☐ verdadera ☐ falsa ☐ no sé