Prova Extramuros 2024 - Doutorado

Observação: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1. (1p) Indique verdadeiro ou falso em cada afirmação.

(a) Seja $a_n \geq 0$ tal que $a_{n+k} \leq a_n + a_k$. Então a sequência $\frac{a_n}{n}$ converge.

(b) Se $\sum x_n$ converge e $|x_n|$ é decrescente então $\sum \sin(x_n)$ não converge.

Solução: (a) Verdadeiro: converge. Note que $n = kp + r$ então $a_n/n \leq ka_p/n + a_r/n$ logo $\limsup a_n/n \leq \liminf a_n/n$
(b) Falso: converge. $\sin x_n = (\frac{\sin |x_n|}{|x_n|})x_n$. Em parênteses é monótona limitada e $\sum x_n$ converge. use o teorema de Abel.

Questão 2. (1p) Seja P o conjunto dos primos maiores que 2. O raio de convergência da série $\sum_{p\in P} x^p$ é:

(a) zero (b) maior do que 1 (c) igual a 1 (d) menor ou igual do que 1

Solução:
R: (c) e (d) Verdadeiros e as outras falsas, pois $|a_n x^n| \leq |x^n|$.

Questão 3. (1.5p) Indique verdadeiro ou falso em cada afirmação.

(a) Existe uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(0) = 0$ mas $f'(x) \geq 1$ se $x \neq 0$.

(b) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx}$ converge uniformemente em $[0, \infty)$.

(c) Existe uma função na reta, periódica, C^∞ tal que suas derivadas $f^{(n)}$ formam uma sequência não limitada (na norma do máximo).

Solução: (a) Falso. Use o teorema do valor médio e passe o limite para $h \to 0$ usando somente a desigualdade ≥ 1.
(b) Falso. Tome $\epsilon = 1/1 + \pi/2$ e $x_n = \pi/2n$.
(c) Verdadeiro, $f(x) = \sin(2x)$.

Questão 4. (1.5p) Seja $\| \, \|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, e $B \subset \mathbb{R}^n$. Chamamos de distância de a a B o número $d(a, B) = \inf_{y\in B} \|a - y\|$. Suponha que para cada inteiro $n > 0$ existe um elemento $y_n \in B$ tal que $\|a - y_n\| \leq d(a, B) + \frac{1}{n}$. Indique verdadeiro ou falso em cada afirmação a seguir.

(a) Se B é fechado, então não existe $b \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$.

(b) Se B é acotado, então existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$.

(c) Se B é compacto, então existe $b \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b)$.

Solução: (a) Falso, (b) Verdadeiro, (c) Verdadeiro.

Caso 1 Suponha que B é compacto. Neste caso podemos extrair da sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Denotamos $z_n = y_{\varphi(n)}$, e seja $b \in B$ o limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos usar que a aplicação $x \to d(a, x)$ é contínua. Como z_n converge para b, temos que $d(a, z_n)$ converge para $d(a, b)$. Passando ao limite na desigualdade $d(a, B) \leq d(a, z_n) \leq d(a, B) + \frac{1}{\varphi(n)}$, obtemos que $d(a, B) \leq d(a, b) \leq d(a, B)$, isto é $d(a, b) = d(a, B)$.

Caso 2 Suponha que B é acotado, isto é B é contido em uma bola K, que podemos tomar fechada, portanto compacta. Note que os y_n estão no compacto K e portanto podemos raciocinar como no caso anterior. Podemos extrair uma sequência $z_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para $b \in K$(mas não necessariamente em B). Segue pelo mesmo argumento que $d(a, b) = d(a, B)$.

Caso 3 Suponha que B é fechado. Note que para $n > 1$ os y_n estão em uma bola fechada de centro a e raio $d(a, B) + 1$, portanto eles estão na interseção desta bola com B, que é um fechado e acotado. Logo estamos na situacão de um compacto contido em B, e podemos raciocinar como no Caso 1.

Questão 5. (2p) A relação $x+y+z+\text{sen}(xyz)=0$ permite definir z como função de x e y na vizinhança do ponto $(0,0,\frac{\pi}{2})$:

(a) Sim,

(b) Não,

(c) Sim e $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=-1$,

(d) Sim e $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=1$

Solução: (a) Falso, (b) Verdadeiro, (c) Falso, (d) Falso.

Seja $f(x,y,z)=x+y+z+\text{sen}(xyz)$. Note que $f(0,0,\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\neq 0$, então, o ponto $(0,0,\frac{\pi}{2})$ não pertence ao conjunto de soluções da equação $f(x,y,z)=0$. Logo, esta relação não permite definir z em função de x,y na vizinhança do ponto dado.

Questão 6. (1.5p) Seja $C\in\mathbb{R}$ uma constante, e $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

$$0\leq f(x)\leq C\int_0^x f(t)dt, \qquad \forall x\in[0,1].$$

Podemos afirmar que:

(a) f se anula num ponto do intervalo $(0,1)$.

(b) f é estritamente positiva no intervalo $[0,1]$.

(c) f é identicamente nula no intervalo $[0,1]$.

Solução: (a) Verdadeiro, (b) Falso, (c) Verdadeiro.
A função $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, é uma primitiva de f em $[0,1]$, logo F é uma função diferenciável neste intervalo. Para todo $x\in[0,1]$ temos que:

$$\left(F(x)e^{-Cx}\right)'=F'(x)e^{-Cx}-CF(x)e^{-Cx}=e^{-Cx}\left(f(x)-CF(x)\right).$$

Segue da desigualdade $0\leq f(x)\leq C\int_0^x f(t)dt$ que $\left(F(x)e^{-Cx}\right)'$ é negativa em $[0,1]$. Portanto a função $x\to F(x)e^{-Cx}$ é decrescente neste intervalo. Ela alcança em $x=0$ seu valor máximo, que é 0, logo $F(x)e^{-Cx}\leq 0$, $\forall x\in[0,1]$. Segue que $F(x)\leq 0$. Por hipótese $F(x)\geq 0$, logo $F(x)=0$ em $[0,1]$. Do que concluímos que f é identicamente nula em $[0,1]$.

Questão 7. (2p) Seja $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\Sigma=\phi^{-1}(c)\subset\mathbb{R}^3$ o subconjunto definido por um valor regular c de $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Considere a restrição $f:=F|_\Sigma$ e decida verdadeiro ou falso em cada afirmação.

(a) O gradiente de F em $x\in\Sigma$ é perpendicular ao plano tangente a Σ em x.

(b) $x\in\Sigma$ é ponto crítico de f se e sómente se o gradiente de F em $x\in\Sigma$ é perpendicular ao plano tangente a Σ em x.

(c) $x\in\Sigma$ é ponto crítico de f se e sómente se o gradiente de F em $x\in\Sigma$ é paralelo ao gradiente de ϕ em x.

(d) Se $\phi=(\phi_1,\phi_2):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $c\in\mathbb{R}^2$ é um valor regular de ϕ e $f=F|_{\phi^{-1}(c)}$, um ponto crítico $x\in\phi^{-1}(c)$ de f é tal que ambos os produtos escalares seguintes são zero, $\nabla F(x)\cdot\nabla\phi_1(x)=0$ e $\nabla F(x)\cdot\nabla\phi_2(x)=0$.

Solução: a) Falso. Isto é porque $x\in\Sigma$ é qualquer ponto. Por exemplo, se $\phi(x_1,x_2,x_3)=x_1$ e $c=0$, temos $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ é o plano $x_1=0$. Tomando $F(x_1,x_2,x_3)=x_2$, o gradiente é $\nabla F=(0,1,0)$ em qualquer ponto que não é perpendicular a Σ.

b) Verdadeiro. Todo vetor tangente a Σ em x pode ser obtido como $v=\frac{d}{dt}\gamma(t=0)$ para uma curva suave $t\mapsto\gamma(t)\in\Sigma$ com $\gamma(0)=x$. Então,

$$df|_x(v)=\nabla F(x)\cdot v=\frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))|_{t=0}.$$

Por outro lado, f tem um ponto crítico em x se $f(\gamma(t))$ possui um ponto crítico em $t=0$ para toda tal curva γ, o qual acontece $\iff$ $\nabla F(x)\cdot v=0$ para todo v tangente a Σ em x.

c) Verdadeiro. Análogamente ao ponto anterior, temos $\nabla\phi(x)\cdot v=0$ para qualquer $x\in\Sigma$ e qualquer tangente v a Σ em x, pois $\phi(\gamma(t))=c$ constante quando $\gamma(t)\in\Sigma$. Como c é valor regular, $\nabla\phi(x)\neq 0$ é um vetor que gera a direção normal ao plano tangente a Σ em x. Logo, pelo item (b), x ponto crítico de f $\iff$ $\nabla F(x)$ é um múltiplo de $\nabla\phi(x)$.

d) Falso. Notamos que Σ será uma curva neste caso. Análogamente ao ponto (c), $\nabla\phi_1(x)$ e $\nabla\phi_2(x)$ são vetores perpendiculares á reta tangente a Σ em qualquer $x \in \Sigma$. Se $x \in \Sigma$ é crítico para f, então $\nabla F(x)$ é também um vetor perpendicular à reta tangente a Σ em x. Logo, $\nabla F(x)$ deve ser uma combinação linear dos vetores $\nabla\phi_1(x), \nabla\phi_2(x)$, mas os coeficientes desta combinação não precisam ser zero.

Questão 8. (2p) Considere $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ o conjunto de matrizes 3×3 reais e o subconjunto

$$G = \{R \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \langle Rv, Rw\rangle = \langle v, w\rangle,\ \forall v, w \in \mathbb{R}^3\}.$$

Seja $I = [-\epsilon, \epsilon]$ e $I \ni t \mapsto R(t) \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma curva C^1 tal que $R(t) \in G$ para todo $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. A derivadas $\frac{d}{dt}R(t)$ são tomadas em cada entrada da matriz. Indique verdadeiro ou falso em cada afirmação a seguir.

(a) $\frac{d}{dt}R|_{t=0}$ é uma matriz antisimétrica.

(b) $R(t)^T \cdot (\frac{d}{dt}R(t))$ é uma matriz antisimétrica para todo $t \in I$, onde ^{T} denota a matriz transposta e $\cdot$ é o produto de matrizes.

(c) Se $U \subset Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é um aberto tal que $G \cap U = \phi^{-1}(c)$ (não vazio) para $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ uma função suave que é uma submersão, então k deve ser 3.

(d) Se $U \subset Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é um aberto tal que $G \cap U = \phi^{-1}(c)$ (não vazio) para $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ uma função suave que é uma submersão, então k deve ser 6.

Solução: a) Falso. Isto é porque $R(0)$ pode ser qualquer ponto de G. Por exemplo, uma rotação

$$\begin{pmatrix} cos(\theta(t)) & sen(\theta(t)) & 0 \\ -sen(\theta(t)) & cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + t$ tem derivada

$$\frac{d}{dt}R|_{t=0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que não é antisimétrica.

b) Verdadeira. Derivando ambos lados da equação que define $R(t)$ estar em G, obtemos

$$\langle \frac{dR}{dt}(t)v, R(t)w\rangle + \langle R(t)v, \frac{dR}{dt}(t)w\rangle = 0$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$. Segue que

$$\left(\frac{dR}{dt}(t)\right)^T \cdot R(t) + R(t)^T \cdot \frac{dR}{dt}(t) = 0, \forall t \in I.$$

Como $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ e $(A^T)^T = A$, a identidade acima diz que $R(t)^T \cdot (\frac{d}{dt}R(t))$ é antisimétrica.

c) Falso. Considerando ϕ como no enunciado, se tomamos uma curva suave $R(t) \in G \cap U$, pelo item (b), teremos que $A(t) = R(t)^T \cdot (\frac{d}{dt}R(t))$ é antisimétrica. Notamos que $R^T = R^{-1}$ para todo $R \in G$, pela definição de G. Segue que qualquer vetor tangente $v \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ a G em um ponto $R \in G \cap U$ será da forma $v = R \cdot A$ para alguma matriz antisimétrica $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Como o espaço vetorial de matrizes antisimétricas 3x3 tem dimensão 3, significa que o espaço tangente a G em tal R tem dimensão 3. Por outro lado, como $G \cap U = \phi^{-1}(c)$ com $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ submersão, o espaço tangente deve ter dimensão $(dim.\ ambiente) - k = 9 - k$. Finalmente, devemos ter $9 - k = 3$, ou seja, $k = 6$.

d) Verdadeiro, pelo explicado acima.

Questão 9. (2p) Considere um campo $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (F_1(x), \dots, F_n(x))$ de classe C^2 com domínio dado por todos os vetores menos a origem, $D = \mathbb{R}^n \setminus 0$. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Se $n = 2$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$ em todos os pontos de D, então $F = \nabla f$ é o gradiente de alguma função $f : D \to \mathbb{R}$.

(b) Se $n = 3$ e $rot(F) = 0$ (o rotacional de F é zero) em todos os pontos de D, então $F = \nabla f$ é o gradiente de alguma função $f : D \to \mathbb{R}$.

(c) Se $n = 3$ e $div(F) = 0$ (a divergência de F é zero) em todos os pontos de D, então a integral $\int_S F \cdot dS$ sobre qualquer superfície fechada S em D toma o valor zero.

(d) Se $n = 3$ e $div(F) = 0$ (a divergência de F é zero) em todos os pontos de D, então a integral $\int_{S_r} F \cdot dS$ sobre qualquer esfera $S_r \subset \mathbb{R}^3$ de raio $r > 0$ (centrada na origem e com a orientação standard) toma o mesmo valor.

Solução: (a) Falso. Isto é porque $D = \mathbb{R}^2 \setminus 0$ não é simplesmente conexo então a integral de linha $I = \int_C F \cdot dl$ sob um caminho fechado que dá uma volta ao redor da origem pode não dar zero. Por exemplo, se $F(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2, x_1)$ e C é dado $\gamma(t) = (cos(t), sen(t)), t \in [0, 2\pi]$, então $I = 2\pi \neq 0$. Mas $I = 0$ é uma condição necessaria para ter $F = \nabla f$.

(b) Verdadeiro. A ideia é que $D = \mathbb{R}^3 \setminus 0$ é simplesmente conexo e podemos definir $f(x) = \int_C F \cdot dl$ como a integral de linha para qualquer caminho C em D que liga um ponto de referência $x_0 \in D$ a $x \in D$. Como todo tal par de caminhos C_1 e C_2 em D constitui o bordo de uma superfície S em D, $\partial S = C_1 \cup (-C_2)$ pelo teorema de Stokes teremos $\int_{C_1} F dl - \int_{C_2} F dl = \int_S rot(F) dS = 0$, provando que f fica bem definida. O fato de que $F = \nabla f$ segue do teorema fundamental do cálculo de maneira standard.

(c) Falso. O problema acontece quando a superfície fechada S é o bordo de uma região $V \subset \mathbb{R}^3$ que contém a origem, $0 \in V$. Em tal caso, não podemos aplicar o teorem da divergência para aproveitar a hipótese $div(F) = 0$. Um contraexemplo é $F(x) = \frac{1}{\|x\|^3} x$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ a esfera de raio 1, obtendo $\int_S F \cdot dS = 4\pi \neq 0$.

(d) Verdadeiro. A ideia é usar o teorema da divergência, dados $r_2 > r_1 > 0$, consideramos a região V encerrada entre as esferas S_{r_1} e S_{r_2}, tal que $\partial V = S_{r_2} \cup (-S_{r_1})$ e então

$$\int_{S_{r_2}} F \cdot dS - \int_{S_{r_1}} F \cdot dS = \int_V div(F) dV = 0.$$

Questão 10. (1.5p) Em relação ao sistema não linear de incógnitas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ seguinte

$$\begin{cases} 2x^3 + y^3 + z + e^{-x^3-y^3} & = 1, \\ x^6 - 3y^6 + 5y^3 + \cos(x^3 + y^3 + z) & = 1, \end{cases}$$

você pode afirmar que:

(a) O sistema não tem solução.

(b) O sistema tem solução única.

(c) O sistema tem infinitas soluções.

Solução: Notemos que o ponto $(0, 0, 0)$ é solução do sistema, pelo que (a) é falso.
Por outro lado, fazendo a mudança de variáveis $u = x^3$ e $v = y^3$, o sistema vira

$$\begin{cases} 2u + v + z + e^{-u-v} & = 1, \\ u^2 - 3v^2 + 5v + \cos(u + v + z) & = 1, \end{cases}$$

e a função

$$F(u, v, z) = (2u + v + z + e^{-u-v}, u^2 - 3v^2 + 5v + \cos(u + v + z))$$

é de classe C^1, e satisfaz $F(0, 0, 0) = (1, 1)$.
Notemos que

$$\begin{aligned} D_{(u,v)}F(0,0,0) &= \left[\begin{array}{cc} 2 - e^{-u-v} & 1 - e^{-u-v} \\ 2u - \sin(u + v + z) & -6v + 5 - \sin(u + v + z) \end{array} \right] \Bigg|_{(0,0,0)} \\ &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{array} \right], \end{aligned}$$

o que é invertível. Pelo T.F.I., temos que existe uma função $z \mapsto (u(z), v(z))$ de classe $C^1(-\epsilon, \epsilon)$ para certo $\epsilon > 0$ tal que

$$F(u(z), v(z), z) = (1, 1),$$

para todo $|z| < \epsilon$. Logo, usando que $x(z) = \sqrt[3]{u(z)}$ e $y(z) = \sqrt[3]{v(z)}$, obtemos infinitas soluções para o sistema original. Assim, (b) é falsa, e a única resposta verdadeira é (c).

Questão 11. (1.5p) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Indique verdadeiro ou falso em cada afirmação a seguir.

(a) Se f é linear e injetora, então $n = 1$.

(b) Para $n > 1$, há funções f tais que para cada $y \in \mathbb{I}m(f)$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\}$ é finito.

(c) Se $n > 1$, então f não pode ser injetora.

Solução: A resposta (a) é verdadeira pelo Teorema do Núcleo-Imagem.
Por outro lado, se $n > 1$ e f não é constante, então existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_{x_i}(x_0) \neq 0$ (derivada parcial) para certo $i = 1, ..., n$. Podemos assumir que $i = 1$ e podemos escrever $x_0 = (x_0^1, x_0')$ com $x_0^1 \in \mathbb{R}$ e $x_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Se $z_0 = f(x_0)$, pelo T.F.I. temos uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ do ponto x_0' e uma função $x' \mapsto x_0^1(x)$ de classe $C^1(V)$ tal que

$$f(x_0^1(x'), x') = z_0, \quad \text{para todo } x' \in V,$$

pelo que (c) é certo. Note que se (b) fosse verdadeira, por (c) necessariamente $Df \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n$, pelo que f é constante e chegamos até uma contradição.

Questão 12. (2p) O valor da integral

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}} dx dy$$

é:

(a) 14/3.

(b) 12/7.

(c) $\pi/7$.

(d) 1/7.

Solução: Aplicamos Fubini sobre a região

$$A = \{(x, y) : y \in [0, 8],\ x \in [\sqrt[3]{y}, 2]\},$$

a que pode ser descrita como

$$A = \{(x, y) : x \in [0, 2],\ y \in [0, x^3]\}.$$

Assim

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}} dy dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16 + x^7}} \int_0^{x^3} y dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^6}{\sqrt{16 + x^7}} dx \\ &= \frac{1}{14} \int_0^2 \frac{7x^6}{\sqrt{16 + x^7}} dx \\ &= \frac{1}{14} \int_0^{144} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

. . . .

Como preencher a folha de respostas. Por favor, preencha os dados de identificação e marque claramente os quadrados escolhidos. No caso de um engano: pede uma folha de respostas nova ou coloque uma nota na rodapé com a resposta desejada.

Pontuação. A pontuação de uma questão é determinado pela formula

$$(\text{pontuação max.}) \times max\{\ 0,\ \frac{(\#\ \text{respostas corretas}) - (\#\text{respostas erradas})}{(\#\text{respostas})}\ \}.$$

Exemplo: No caso de uma questão com 3 pontos, 2 respostas corretas, uma errada e três indecididas, a pontuação final é 3 x (2-1)/6 $=$ 0.5.

. . . .

Prova Extramuros 2024 - Doutorado

Identidade e respostas

Nome: ____________________

Identidade ☐ Passaporte ☐ Cédula de identidade

Identidade (numero) ____________________

Instituição de aplicação ____________________

Assinatura ____________________

Resposta 1 (1p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 2 (1p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(d) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 3 (1.5p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 4 (1.5p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 5 (2p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(d) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 6 (1.5p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 7 (2p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(d) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 8 (2p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(d) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 9 (2p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(d) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 10 (1.5p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 11 (1.5p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei

Resposta 12 (2p)
(a) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(b) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(c) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei
(d) ☐ verdadeira ☐ falsa ☐ não sei