PRUEBA EXTRAMUROS - DOCTORADO - 2017

Nombre: ______________________________

Identidad (pasaporte): ______________________________

Firma: ______________________________

Institución donde la prueba fue aplicada: ______________________________

OBSERVACIÓN: El tiempo de duración de esta prueba es de cinco (5) horas.

Pregunta 1. Sean X y Y subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$. Muestre que si X es compacto y Y cerrado, entonces $d(X,Y) > 0$, donde

$$d(X,Y) = \inf\big\{\|x-y\| \,;\, x \in X,\, y \in Y\big\}.$$

Pregunta 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y $0 < f'(t) \leq 1$, para todo $t \in [0,1]$. Muestre que

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(t)\,dt.$$

Pregunta 3. Sea $N : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ verificando las propiedades

$$\begin{array}{ll} (i) & N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \\ (ii) & N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Definimos la bola unitaria B asociada a N como $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, N(x) \leq 1\big\}$. Pruebe que N es una norma si, y solamente si, B es subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

Pregunta 4. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es p-homogénea si $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$, $\forall \lambda > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si $\langle : \rangle$ denota el producto escalar usual, muestre que una función diferenciable es p-homogénea si, y solamente si, satisface la relación

$$\big\langle x : \nabla f(x) \big\rangle = p f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pregunta 5. Sea G_n^+ el conjunto de las matrices reales simétricas y positivas de orden n. Recordando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2)\,dt = \sqrt{\pi/\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

muestre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right) dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}, \quad \forall A \in G_n^+.$$