

CORRECTED

PROVA EXTRAMUROS - 2017

NOME: _____

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): _____

ASSINATURA: _____

INSTRUÇÕES

- (i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.
 - (ii) A Parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total da prova.
 - (iii) Cada questão de múltipla escolha (Parte II) vale 5 pontos.
 - (iv) Não se esqueça de transcrever as respostas das questões de múltipla escolha para a **FOLHA DE RESPOSTAS** (última folha da prova). O seu nome, sua identidade (ou passaporte) e sua assinatura também devem estar presentes na folha de respostas.
 - (v) As questões de múltipla escolha serão corrigidas por leitura óptica. **ATENÇÃO! Preencha os quadrados por completo (não basta fazer um “X”) e utilize caneta preta ou azul.**
-
-

BOA PROVA!

CORRECTED

PARTE I: QUESTÕES DISSERTATIVAS

Questão 1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existe $0 \leq \theta < 1$ satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta|x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Considere a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + f(x)$ e mostre que:

- (I) g é uma função contínua.
- (II) g é uma função injetora.
- (III) g é uma função sobrejetora.
- (IV) g^{-1} é uma função contínua.

Solução: (I) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$|g(x) - g(y)| = |x + f(x) - (y + f(y))| \leq |x - y| + |f(x) - f(y)|.$$

Pela hipótese, tem-se

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y| + \theta|x - y| = (1 + \theta)|x - y|.$$

Portanto, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta := \epsilon/(1 + \theta)$ tais que para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $y \in \mathbb{R}$ tais que $|x - y| < \delta$ tem-se

$$|g(x) - g(y)| \leq (1 + \theta)|x - y| < (1 + \theta)\delta = \epsilon,$$

mostrando a continuidade da função g em x . Em verdade, esse argumento mostra a continuidade uniforme da função g .

(II) Supondo, por contradição, que g não seja injetora, existem $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, tais que $g(x) = g(y)$. Portanto,

$$0 = |g(x) - g(y)| = |x - y + f(x) - f(y)|.$$

Pela desigualdade triangular, tem-se

$$|x - y + f(x) - f(y)| \geq |x - y| - |f(x) - f(y)|.$$

Por hipótese, segue-se

$$0 \geq |x - y| - \theta|x - y| = (1 - \theta)|x - y| > 0,$$

uma contradição. Portanto, g é injetora.

(III) Para $x \geq 0$, por hipótese, tem-se

$$g(x) - g(0) = x + f(x) - f(0) \geq x - |f(x) - f(0)| \geq (1 - \theta)x.$$

Assim, $g(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Analogamente, para $x \leq 0$, tem-se

$$g(x) - g(0) = x + f(x) - f(0) \leq x + |f(x) - f(0)| \leq x + \theta|x - 0| = x - \theta x = (1 - \theta)x.$$

Assim, $g(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$. Dado $w \in \mathbb{R}$, considere $A < 0$ e $B > 0$ tais que $A < w < B$. Como $g(x) \rightarrow \pm\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que $g(a) < A$ e $B < g(b)$. Desse modo, $g(a) < w < g(b)$. Sendo g contínua em $[a, b]$, pelo teorema do valor intermediário, existe x entre a e b tal que $g(x) = w$. Como w é arbitrário, segue que g é sobrejetora.

(IV) Note primeiramente que g é uma função monótona crescente. De fato, para $y < x$, tem-se

$$f(x) - f(y) \geq -|f(x) - f(y)| \geq -\theta|x - y| = -\theta(x - y).$$

De onde segue que

$$g(x) - g(y) = x - y + f(x) - f(y) \geq x - y - \theta(x - y) = (1 - \theta)(x - y).$$

Como $1 - \theta > 0$ e $x - y > 0$, g é uma função monótona crescente. Como g é injetora e sobrejetora,

CORRECTED

existe $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tais que $y_0 = g(x_0)$. Usando a monotonicidade, para qualquer $\epsilon > 0$ tem-se

$$g(x_0 - \epsilon) < g(x_0) < g(x_0 + \epsilon).$$

Seja $\delta := \min\{g(x_0) - g(x_0 - \epsilon), g(x_0 + \epsilon) - g(x_0)\}$. Assim,

$$g(x_0 - \epsilon) < g(x_0) - \delta < g(x_0) + \delta < g(x_0 + \delta).$$

Portanto, para qualquer y tal que

$$g(x_0) - \delta < y < g(x_0) + \delta$$

e assim

$$g(x_0 - \epsilon) < y < g(x_0 + \epsilon).$$

Como g é monótona crescente, g^{-1} também é. Portanto,

$$x_0 - \epsilon < g^{-1}(y) < x_0 + \epsilon,$$

o que completa a demonstração que g^{-1} é contínua em y_0 .

Questão 2. Considere o conjunto $\mathbb{Q}_{>0} = \{r \in \mathbb{Q}; r > 0\}$. Mostre que:

- (I) O grupo multiplicativo $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ é gerado pelo conjunto dos primos.
 (II) O grupo aditivo $(\mathbb{Z}[X], +)$ é isomorfo ao grupo multiplicativo $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$.

Solução: (I) Seja $A = \{p; p \text{ é primo}\}$ e seja $\langle A \rangle$ o subgrupo de $\mathbb{Q}_{>0}$ gerado por A . Pela definição, $\langle A \rangle = \{a_1^{\pm 1} a_2^{\pm 1} \dots a_m^{\pm 1}; a_i \in A, m \in \mathbb{N}\}$. Para mostrar que $\langle A \rangle = \mathbb{Q}_{>0}$, basta mostrar que $\mathbb{Q}_{>0} \subset \langle A \rangle$. Seja x um elemento arbitrário em $\mathbb{Q}_{>0}$. Então $x = m/n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem primos p_i e q_j tais que $m = p_1 p_2 \dots p_r$ e $n = q_1 q_2 \dots q_s$. Logo $x = m/n = p_1 p_2 \dots p_r / q_1 q_2 \dots q_s \in \langle A \rangle$, e por isso, $\mathbb{Q}_{>0} \subset \langle A \rangle$.

(II) Enumerando os números primos, o conjunto $A = \{p; p \text{ é primo}\}$ pode ser escrito como $A = \{p_i; i = 0, 1, 2, \dots\}$. Note que cada elemento de $\mathbb{Z}[X]$ é da forma $\sum_{i=0}^k a_i x^i$, onde k é um número inteiro não negativo e $a_i \in \mathbb{Z}$. Defina uma função $\phi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ da forma seguinte:

$$\phi \left(\sum_{i=0}^k a_i x^i \right) = \prod_{i=0}^k p_i^{a_i}.$$

É fácil ver que esta função é um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{Z}[X], +)$ para o grupo multiplicativo $\mathbb{Q}_{>0}$. Segue do Teorema Fundamental da Aritmética que ϕ é injetor. Como $\phi(x^j) = p_j$ para todo inteiro não negativo j , tem-se $A \subset \phi(\mathbb{Z}[X])$. Agora da parte (I) segue que $\phi(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Q}_{>0}$. Logo ϕ é um isomorfismo.

PARTE II: QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA

Questão 1 Indique a afirmação **FALSA**:

a) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Dados quaisquer x_1, x_2 em $[a, b]$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

b) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(A) \subset \mathbb{R}$ é aberto sempre que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto. Então f é injetiva.

c) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$. Então f é uniformemente contínua em \mathbb{R} .

d) Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas com $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.

e) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Se f'' é limitada, então f é uniformemente contínua em \mathbb{R} .

Questão 2 Indique a afirmação **FALSA**:

a) Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$ para todo $x \in [0, 1]$, então f é identicamente nula em $[0, 1]$.

b) Seja $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in]0, \infty[$. Então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \ln(x)$.

c) Sejam $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Então $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

d) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana (i.e. existe $\lambda > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$). Se $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

e) Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \int_1^n \frac{1}{x} dx$. Então a sequência (x_n) é convergente.

Questão 3 Indique a afirmação **FALSA**:

a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência de pontos distintos, com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e tal que $f(x_n) = 0$ para todo n . Então $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$.

b) Se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e uniformemente contínua, então f' é limitada em $]a, b[$.

c) Sejam a, b e c números reais positivos. Então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{a^h + b^h + c^h}{3} \right)^{1/h} = \sqrt[3]{abc}.$$

d) Para a, b e c constantes, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se f tem um mínimo local, então f também tem um máximo local.

e) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e assume apenas um número finito de valores, então f é constante.

Questão 4 Indique a afirmação **FALSA**:

a) Se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A tem pelo menos um ponto de acumulação.

b) Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio. Então existe uma sequência (x_n) em S tal que todo elemento de S é limite de alguma subsequência de (x_n) .

c) Seja (x_n) uma sequência de números reais que contém ao menos uma subsequência convergente e tal que toda subsequência convergente converge para o mesmo ponto. Então a sequência (x_n) é convergente.

d) Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto e não vazio. Então A pode ser escrito como uma união disjunta de intervalos abertos.

e) Seja $S \subset \mathbb{R}$ com pelo menos um ponto de acumulação. Se $x + y \in S$ e $x - y \in S$ para quaisquer $x, y \in S$, então S é denso em \mathbb{R} .

Lembre-se: Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se existe uma sequência (x_n) em $A \setminus \{L\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$.

Questão 5 Sabemos que existe uma série de potências tal que

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com valor absoluto suficientemente pequeno. Considere as afirmações:

- (I) Esta série de potências converge para todo $x \in]-1, 1[$.
- (II) Temos que $a_{573} - 3a_{572} + 2a_{571} = 0$.
- (III) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2$.
- (IV) Temos que

$$-\ln|x-1| - \ln|x-2| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

para todo número real x com valor absoluto suficientemente pequeno.

- (V) Temos que $2a_{342} - 3a_{341} + a_{340} = 0$.

Quais das afirmações acima são **FALSAS**?

- (a) (III) e (V)
- (b) (II), (III) e (IV)
- (c) (I) e (IV)
- (d) (II) e (III)
- (e) (I), (II) e (IV)

Questão 6 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos reais e $T : V \rightarrow V$ um operador linear real tal que $T^2 = T - I$, onde I denota o operador identidade de V . Considere as seguintes afirmações:

- (I) O polinômio característico de T , na variável t , é necessariamente $t^2 - t + 1$.
- (II) O polinômio minimal de T , na variável t , é $t^2 - t + 1$.
- (III) T é diagonalizável.
- (IV) T é nilpotente, isto é, existe um inteiro $\kappa > 0$ tal que $T^\kappa = 0$.
- (V) Existe um inteiro $\ell > 0$ tal que $T^\ell = I$.

Assinale a alternativa **CORRETA**:

- (a) (I), (II) e (IV) são verdadeiras.
- (b) (II), (III) e (V) são verdadeiras.
- (c) (I) é verdadeira, (IV) e (V) são falsas.
- (d) (V) é verdadeira, (III) e (IV) são falsas.
- (e) (V) é verdadeira, (II) e (III) são falsas.

Questão 7 Seja M a matriz de ordem 1000 com entradas todas iguais a 1. Assinale a alternativa que fornece o polinômio característico de M na variável t :

a) $t^{1000} - 1$

b) $t^{999}(t - 1000)$

c) $t^{999}(t - 1)$

d) $(t - 1)^{1000}$

e) $t^{500}(t - 1000)^{500}$

Questão 8 Considere \mathbb{R}^4 com o produto interno usual. Considere o operador linear cuja matriz na base canônica de \mathbb{R}^4 é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & a_4 & a_5 & a_7 \\ a_1 & 1/\sqrt{2} & a_6 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & a_8 \end{pmatrix}.$$

Dentre as entradas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ (nesta ordem), apresentadas a seguir, qual delas garante que o operador é uma isometria?

a) $0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 1$

b) $1, 0, -1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, -1$

c) $0, 0, 1, 0, 0, -1, 1, 1/\sqrt{2}$

d) $1, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 1$

e) $0, 0, -1, 0, 0, 1, 1, -1/\sqrt{2}$

Questão 9 Seja $\Delta := \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3; p_i > 0, p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$ o interior de um 2-simplexo. Dados $p = (p_1, p_2, p_3), q = (q_1, q_2, q_3) \in \Delta$ e dado $r \in \mathbb{R}$, definimos

$$p \uplus q := \frac{(p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3)}{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}, \quad r \odot p := \frac{(p_1^r, p_2^r, p_3^r)}{p_1^r + p_2^r + p_3^r}.$$

Munido de tais operações, Δ é um espaço vetorial real.

Seja $S = \{(t/2, t/2, 1-t) \in \Delta; t \in]0, 1[\}$ a interseção de Δ com a reta (usual) passando pelos pontos $(0, 0, 1)$ e $(1/2, 1/2, 0)$. Indique a alternativa **CORRETA**:

- a) S não é um subespaço unidimensional de Δ e, além disso, não há nenhum subespaço unidimensional de Δ que esteja contido em uma reta (usual) de \mathbb{R}^3 .
- b) S não é um subespaço unidimensional de Δ , mas existe pelo menos um subespaço unidimensional de Δ contido em uma reta (usual) de \mathbb{R}^3 .
- c) S é um subespaço unidimensional de Δ e é o único subespaço unidimensional de Δ que está contido em uma reta (usual) de \mathbb{R}^3 .
- d) S é um subespaço unidimensional de Δ e, além disso, existe exatamente mais um subespaço unidimensional de Δ distinto de S que está contido em uma reta (usual) de \mathbb{R}^3 .
- e) S é um subespaço unidimensional de Δ e, além disso, existem pelo menos outros dois subespaços unidimensionais de Δ , distintos entre si e distintos de S , cada qual contido em uma reta (usual) de \mathbb{R}^3 .

Questão 10 Seja $C([-\pi, \pi]) := \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$ o conjunto das funções contínuas do intervalo fechado $[-\pi, \pi]$ para a reta real. Colocamos em $C([-\pi, \pi])$ a estrutura de espaço vetorial real dada por $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ e $(r \cdot f)(x) := r \cdot f(x)$ para todos $f, g \in C([-\pi, \pi])$ e $r \in \mathbb{R}$. Finalmente, introduzimos em $C([-\pi, \pi])$ o produto interno $\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$.

Sejam $W_1, W_2, W_3, W_4 \subset C([-\pi, \pi])$ os seguintes subespaços:

- W_1 é gerado pelas funções $\sin^2(x), \sin(2x), \cos^2(x), \cos(2x)$
 W_2 é gerado pelas funções $1, \sin(x), \cos(x)$
 W_3 é gerado pela função $\sin(x)$
 W_4 é gerado pela função $\cos(x)$.

Assinale a alternativa que fornece as dimensões de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ entre os subespaços unidimensionais W_3 e W_4 :

- a) $\dim W_1 = 4, \dim W_2 = 3, \dim(W_1 + W_2) = 6, \theta = 0$
- b) $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 3, \dim(W_1 + W_2) = 5, \theta = \frac{\pi}{2}$
- c) $\dim W_1 = 4, \dim W_2 = 2, \dim(W_1 + W_2) = 4, \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$
- d) $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 3, \dim(W_1 + W_2) = 4, \theta = \frac{\pi}{2}$
- e) $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 2, \dim(W_1 + W_2) = 5, \theta = 0$

Questão 11 Seja p um primo e \mathbb{F}_p o corpo finito de p elementos. Para $n \geq 2$ e $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$, seja $T \leq G$ o subgrupo das matrizes triangulares superiores, com as entradas da diagonal principal iguais a 1. Denote por $N_G(T)$ o normalizador de T em G . Assinale a alternativa **CORRETA**:

- a) $|T| = p^{n(n-1)/2}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)/2}$.
- b) $|T| = p^{n(n-1)/2}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^n p^{n(n-1)/2}$.
- c) $|T| = p^{n(n-1)}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)/2}$.
- d) $|T| = p^{n(n-1)/2}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)}$.
- e) $|T| = p^{n(n-1)}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)}$.

Questão 12 Seja S_n o grupo das permutações de n letras. Indique a afirmação **FALSA**:

- a) S_{16} tem um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times S_3$.
- b) S_{16} tem pelo menos dois subgrupos isomorfos a $S_7 \times S_9$.
- c) S_{16} tem um subgrupo isomorfo a $S_{13} \times S_3$.
- d) S_{16} é isomorfo a um subgrupo de $GL_{17}(\mathbb{F}_p)$.
- e) S_{16} é isomorfo a um subgrupo de A_{17} .

Questão 13 Sabendo que 2017 é primo, considere o anel

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } 2017 \nmid n \right\}.$$

Indique a afirmação **CORRETA**:

- a) A tem um número infinito de ideais maximais.
- b) A tem um número finito de ideais.
- c) A tem um número finito de ideais maximais e um número infinito de ideais primos.
- d) A tem apenas um ideal maximal.
- e) A tem apenas dois ideais maximais.

Questão 14 Indique a afirmação **FALSA**:

- a) Todo grupo cíclico de ordem 24 tem 8 subgrupos.
- b) Para todo n , existe um homomorfismo injetor de S_n em $GL_n(\mathbb{R})$.
- c) Existe um homomorfismo sobrejetor de S_3 em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- d) Para todo n , o grupo S_n pode ser gerado por quatro elementos.
- e) $S_3 \cong GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Questão 15 Seja $\langle 13, X^2 \rangle$ o ideal de $\mathbb{Z}[X]$ definido por

$$\langle 13, X^2 \rangle := \{13 \cdot r(X) + X^2 \cdot s(X); r(X), s(X) \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Quantos homomorfismos de anéis $\varphi : \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[X]/\langle 13, X^2 \rangle$ existem?

- a 1
- b 2
- c 3
- d 13
- e 13^2

Lembre-se: Um homomorfismo de anéis não necessariamente preserva o elemento neutro da multiplicação.

PROVA EXTRAMUROS - 2017

FOLHA DE RESPOSTAS

NOME: _____

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): _____

ASSINATURA: _____

As respostas das questões de múltipla escolha devem ser marcadas NESTA folha.
Respostas no caderno de questões NÃO serão consideradas!

QUESTÃO 1: a b c d

QUESTÃO 2: a b c d e

QUESTÃO 3: a b c d e

QUESTÃO 4: a b c d e

QUESTÃO 5: a b c d e

QUESTÃO 6: a b c d e

QUESTÃO 7: a b c d e

QUESTÃO 8: a b c d e

QUESTÃO 9: a b c d e

QUESTÃO 10: a b c d e

QUESTÃO 11: a b c d e

QUESTÃO 12: a b c d e

QUESTÃO 13: a b c d e

QUESTÃO 14: a b c d e

QUESTÃO 15: a b c d e