PRUEBA EXTRAMUROS - 2018

NOMBRES Y APELLIDOS: ______________________________

DOCUMENTO DE IDENTIDAD (O PASAPORTE): ______________________________

FIRMA: ______________________________

Instrucciones

(i) El tiempo destinado para esta prueba es de 5 horas.

(ii) La Parte I (dos cuestiones disertivas) corresponde a 25% de la puntuación total de la prueba.

(iii) Cada cuestión de selección multiple (Parte II) vale 5 puntos.

(iv) No se olvide de transcribir las respuestas de las cuestiones de selección múltiple para la **HOJA DE RESPUESTAS** (última hoja de la prueba). Sus nombres y apellidos, su documento de identidad (o pasaporte) y su firma también deben estar presentes en la hoja de respuestas.

(v) Las cuestiones de selección múltiple serán corregidas por lectura óptica. **ATENCIÓN: llenar los cuadrados por completo (no basta hacer un "X") y utilice lapicero negro o azul.**

BUENA PRUEBA!

Parte I: Cuestiones disertivas

Cuestión 1. Sea $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ contínua. Defina la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt, \quad \text{para todo } x \in [0,1] \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Muestre que:

(I) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función contínua.

(II) La sucesión (f_n) converge para f uniformemente en $[0,1]$.

Cuestión 2. Sea G un grupo abeliano finito. Muestre que:

(I) Si p es un primo tal que $p \mid |G|$, entonces G tiene un elemento de orden p.

(II) Si $n \mid |G|$, entonces G tiene un subgrupo de orden n.

(III) Si $n \mid |G|$, entonces el número de soluciones de la ecuación $x^n = 1$ en G es múltiplo de n.

Parte II: Cuestiones de selección multiple

Cuestión 1 Indique la afirmación **falsa**.

a Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada, monótona y contínua, entonces f es uniformemente contínua en $\mathbb{R}$.

b Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente contínua en $\mathbb{R}$, entonces existen $a \geq 0$ y $b \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq a|x| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es contínua y existen constantes $a \geq 0$ y $b \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq a|x| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es uniformemente contínua en $\mathbb{R}$.

d Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en I. Si f' es acotada en I, entonces f es uniformemente contínua en I.

e Sean $K \subset \mathbb{R}$ un compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Entonces f es uniformemente contínua en K.

Cuestión 2 Indique la afirmación **falsa**.

a Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in (0,1)$ y $(f(x))^2 = 2\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ para cada $x \in [0,1]$. Entonces $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

b Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua y no negativa. Entonces

$$\left(\int_a^b f(x)\cos(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

c Sea $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ contínua. Si existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x))^n dx = L \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$.

d Sean $c > 0$ y $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ derivable. Si $cf(x) + f'(x) \leq 0$ para todo x, entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

e Sea $f : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ contínua tal que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ es convergente. Entonces $\displaystyle\int_0^\infty (f(x))^2dx$ es convergente.

Cuestión 3 Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $|a_n - 1| \leq 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere la série de potencias centrada en 0 dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y indique la afirmación **falsa**.

- a Esta série de potencias no converge en $x = -1$.
- b El radio de convergencia de esta série es 1.
- c Existe una función derivable $g(x)$ en $[-0.5, 0.5]$ de modo que $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + g(x)$ para todo x en $[-0.5, 0.5]$.
- d $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$.
- e $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$.

Cuestión 4 Considere el conjunto S de todos los números reales $x \in [0, 1]$ que tienen una expansión decimal de la forma

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots$$

donde todos los dígitos d_i están en el conjunto $\{0, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Indique la afirmación **falsa**.

- a S es un conjunto cerrado.
- b Hay una biyección entre S y $[0, 1]$.
- c Si A es un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $A \cap S \neq \emptyset$, entonces $A \cap S$ no es enumerable.
- d Existe un intervalo abierto no vacio enteramente contenido en S.
- e S posée infinitos elementos que son números racionales.

Cuestión 5 Sea $x_0, x_1, x_2, \dots$ una sucesión convergente de números reales tal que para todo n

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} + x_n - \frac{1}{2}.$$

Sea L el limite de esta sucesión. Indique la afirmación **falsa**.

a $L \in \{-1, 1\}$.

b Si $L = -1$, entonces existe n_0 tal que $x_n = -1$ para todo $n \geq n_0$.

c Existe $\lambda \in (0, 1)$ y $C > 0$ tal que para todo n

$$|L - x_n| \leq C\lambda^n.$$

d Si $L = 1$, entonces existe n_0 tal que $x_n = 1$ para todo $n \geq n_0$.

e Existen dos valores de x_0, digamos a y b, tales que las sucesiones definidas a partir de $x_0 = a$ e $x_0 = b$ no son constantes, el limite de la sucesión iniciando en a es -1, y el limite de la sucesión iniciando en b es 1.

Cuestión 6 Sea $V = \mathbb{R}[t]$ el espacio vectorial real de las funciones polinomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $D : V \to V$ el operador derivación, $D(p)(t) = p'(t)$, y sea $T : V \to V$ el operador definido por $T(p)(t) = tp(t)$. Considere las siguientes afirmaciones:

(I) D es sobreyector.

(II) D es inyector.

(III) T es sobreyector.

(IV) T es inyector.

(V) $\ker(D) = \{p \in V \ : \ p(0) = 0\}$.

(VI) $\operatorname{Im}(T) = \{p \in V \ : \ p(0) = 0\}$.

Dentro de las siguientes alternativas, indique la **correcta**:

a (I), (III) y (IV) son verdaderas.

b (II), (III) y (V) son falsas.

c (I), (V) y (VI) son verdaderas.

d (II), (V) y (VI) son falsas.

e (II), (III) y (IV) son verdaderas.

Cuestión 7 Sea A una matriz real de orden $n > 1$ con n autovalores distintos. Sea $B \neq I_n$ una matriz que conmuta con A, donde I_n representa la matriz identidad de orde n. Considere las siguientes afirmaciones:

(I) B tiene los mismos autovalores de A.

(II) Todos los autovectores de A son autovectores de B.

(III) B tiene autovalor nulo si A tiene autovalor nulo.

(IV) La forma de Jordan de B es una matriz diagonal.

(V) El producto AB no es diagonalizáble.

Dentro de las alternativas a seguir, indique la **correta**:

- [a] (I), (II) y (IV) son verdaderas y las demas son falsas.
- [b] (II), (III) y (V) son verdaderas y las demas son falsas.
- [c] (I) y (IV) son verdaderas y las demas son falsas.
- [d] (II) y (IV) son verdaderas y las demas son falsas.
- [e] (III) y (V) son verdaderas y las demas son falsas.

Cuestión 8 Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial formado por todas las sucesiones numéricas de la forma $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ con $a_i \in \mathbb{R}$. La adición y la multiplicación por escalar son definidas termino a termino, es decir, $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ y $r(a_0, a_1, a_2, \dots) := (ra_0, ra_1, ra_2, \dots)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Definimos

$$W := \big\{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in V \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ para todo natural } n \geq 0\big\}.$$

Sea $\phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. La siguiente afirmación es **correcta**:

- [a] W es un subespacio vectorial de V y posée dimensión finita. Los vectores $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ y $v_2 := \big(1, 1-\phi, (1-\phi)^2, (1-\phi)^3, \dots\big)$ pertenecen a W y son linealmente independientes, pero no generan W.
- [b] W es un subespacio vectorial de V y posée dimensión finita. Los vectores $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ y $v_2 := \big(1, 1-\phi, (1-\phi)^2, (1-\phi)^3, \dots\big)$ pertenecen a W y constituyen una base para W.
- [c] W es un subespacio vectorial de V y posée dimensión finita. Los vectores $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ y $v_2 := \big(1, 1-\phi, (1-\phi)^2, (1-\phi)^3, \dots\big)$ no pertenecen a W.
- [d] W es un subespacio vectorial de V y posée dimensión infinita.
- [e] W no es un subespacio vectorial de V.

Cuestión 9 Sea P_n el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$. Introducimos un producto interno en P_n atravez de la fórmula

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad p, q \in P_n.$$

Sea $T : P_n \to P_n$ el operador lineal definido por $T(p)(t) := \big((1-t^2)p'(t)\big)'$ para $p \in P_n$ y sea $r_j(t) := \dfrac{d^j}{dt^j}(1-t^2)^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. El polinomio $r_j(t)$ satisface la ecuación diferencial $(1-t^2)r_j''(t) - 2tr_j'(t) + j(j+1)r_j = 0$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Considere las siguientes afirmaciones:

(I) El operador T es auto-adjunto.

(II) Para $i \neq j$, $\langle r_i, r_j\rangle = 0$.

(III) $r_0, \ldots, r_n$ forman una base para P_n.

(IV) El complemento ortogonal de P_{k-1} en P_k es generado por r_k para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Podemos afirmar que

a (I) y (III) son correctas pero (II) y (IV) son incorrectas.

b (I) y (II) son correctas pero (III) y (IV) son incorrectas.

c (II) y (III) son correctas pero (I) y (IV) son incorrectas.

d (I) y (IV) son correctas pero (II) y (III) son incorrectas.

e Todas las alternativas son correctas.

Cuestión 10 Una *sucesión exacta* de espacios vectoriales V_i de dimensión finita

$$0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} V_4 \xrightarrow{T_4} 0$$

es una sucesión de transformaciones lineales T_i tales que $\ker T_{i+1} = \operatorname{im} T_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ (denotamos por 0 el espacio vectorial nulo). Si en la sucesión exacta anterior $\dim V_i = d_i$, entonces es siempre verdad que

a $d_1 = d_2 + d_3 + d_4$.

b $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

c $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$.

d $d_4 = d_1 + d_2 + d_3$.

e $d_1 + d_2 \geq d_3 + d_4$.

Cuestión 11 Considere los siguiente ideales de $\mathbb{Z}[X]$: $I = \langle X^2 - 2\rangle$, $J = \langle 7, X^2 + 1\rangle$ y $K = \langle X^2 - 3, 5\rangle$. Indique la alternativa **correcta**.

- [a] I y K son maximales y J no es primo.
- [b] K es primo, pero I y J no son primos.
- [c] I es primo, K es maximal y J no es primo.
- [d] Ninguno de los ideales es maximal.
- [e] Todos los ideales son primos.

Cuestión 12 Sea S_n el grupo simétrico en n letras. Indique la alternativa **incorrecta**.

- [a] Todo $\sigma \in S_n$ dado por un ciclo de longitud ímpar es una permutación par.
- [b] Sea $\sigma \in S_n$ un ciclo de longitud k. Si k y m son primos entre sí, entonces σ^m es un ciclo de longitud k.
- [c] Cualesquiera dos ciclos con la misma longitud en S_n son conjugados.
- [d] El grupo de automorfismos de A_n no tiene subgrupo isomorfo a S_n.
- [e] Para $n \geq 5$, A_n es el único subgrupo normal no trivial de S_n.

Cuestión 13 Sea D_n el grupo diedral de orden $2n$, donde $n \geq 3$. Indique la alternativa **incorrecta**.

- [a] Existe un monomorfismo de D_n en S_n.
- [b] Si n es par, entonces $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ es isomorfo a un subgrupo de D_n.
- [c] D_n tiene un subgrupo normal de orden 2.
- [d] D_n tiene un subgrupo normal de orden n.
- [e] D_n es generado por dos elementos de orden 2.

Cuestión 14 Sea G un grupo y considere las siguientes afirmaciones:

(I) Si $H \leq G$ y $K \trianglelefteq G$, entonces $HK \trianglelefteq G$.

(II) Si S es subconjunto de G, entonces $C_G(S) = C_G(C_G(C_G(S)))$. Aqui $C_G(X)$ representa el centralizador de X en G.

(III) Si M es subgrupo maximal de G, entonces $Z(G) \leq M$ o $M \trianglelefteq G$.

(IV) $\mathrm{Aut}(G \times G) \simeq \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G)$.

(V) Si $H, K \trianglelefteq G$, entonces $G/(H \cap K)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/K$.

Indique la alternativa donde todos los items son verdaderos.

[a] (I), (II), (V).

[b] (II), (III), (V).

[c] (I), (II), (III).

[d] (II), (III), (IV).

[e] (III), (IV), (V).

Cuestión 15 Indique la alternativa **incorrecta**.

[a] Si $K = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 11 \rangle}$, entonces el grupo multiplicativo de K es cíclico y tiene 4 subgrupos.

[b] Existe un anillo A para el cual el polinomio $p(x) = x^3 - x \in A[x]$ tiene por lo menos 4 raízes distintas en A.

[c] El polinomio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 10x + 2018$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

[d] Si $K = \mathbb{F}_{13}$ es el cuerpo finito de 13 elementos, entonces existe $p(x) \in K[x]$ de grado 3 para el cual $\#\{p(\alpha)\ : \alpha \in \mathbb{F}_{13}\} < 5$.

[e] Si $A[x]$ es domínio de ideales principales, entonces A es un cuerpo.

PRUEBA EXTRAMUROS - 2018

HOJA DE RESPUESTAS

NOMBRES Y APELLIDOS: ______________________________

DOCUMENTO DE IDENTIDAD (O PASAPORTE): ______________________________

FIRMA: ______________________________

Las respuestas de las cuestiones de selección múltiple deben ser marcadas en ESTA hoja. Respuestas en el cuaderno de cuestiones NO serán consideradas!

Cuestión 1: a b c d e

Cuestión 2: a b c d e

Cuestión 3: a b c d e

Cuestión 4: a b c d e

Cuestión 5: a b c d e

Cuestión 6: a b c d e

Cuestión 7: a b c d e

Cuestión 8: a b c d e

Cuestión 9: a b c d e

Cuestión 10: a b c d e

Cuestión 11: a b c d e

Cuestión 12: a b c d e

Cuestión 13: a b c d e

Cuestión 14: a b c d e

Cuestión 15: a b c d e