PROVA EXTRAMUROS - 2018

NOME: ____________________

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): ____________________

ASSINATURA: ____________________

INSTRUÇÕES

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) A Parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total da prova.

(iii) Cada questão de múltipla escolha (Parte II) vale 5 pontos.

(iv) Não se esqueça de transcrever as respostas das questões de múltipla escolha para a **FOLHA DE RESPOSTAS** (última folha da prova). O seu nome, sua identidade (ou passaporte) e sua assinatura também devem estar presentes na folha de respostas.

(v) As questões de múltipla escolha serão corrigidas por leitura óptica. **ATENÇÃO! Preencha os quadrados por completo (não basta fazer um "X") e utilize caneta preta ou azul.**

BOA PROVA!

Parte I: Questões dissertativas

Questão 1. Seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ contínua. Defina a sequência de funções

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt, \quad \text{para todo } x \in [0,1] \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que:

(I) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(II) A sequência (f_n) converge para f uniformemente em $[0, 1]$.

Questão 2. Seja G um grupo abeliano finito. Mostre que:

(I) Se p é um primo tal que $p \mid |G|$, então G tem elemento de ordem p.

(II) Se $n \mid |G|$, então G tem subgrupo de ordem n.

(III) Se $n \mid |G|$, então o número de soluções da equação $x^n = 1$ em G é múltiplo de n.

Parte II: Questões de múltipla escolha

Questão 1 Indique a afirmação **falsa**.

- [a] Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada, monótona e contínua, então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.
- [b] Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, então existem $a \geq 0$ e $b \geq 0$ tais que $|f(x)| \leq a|x| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- [c] Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e existem constantes $a \geq 0$ e $b \geq 0$ tais que $|f(x)| \leq a|x| + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.
- [d] Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I. Se f' é limitada em I, então f é uniformemente contínua em I.
- [e] Sejam $K \subset \mathbb{R}$ um compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é uniformemente contínua em K.

Questão 2 Indique a afirmação **falsa**.

- [a] Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in (0, 1)$ e $(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)dt$ para cada $x \in [0, 1]$. Então $f(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.
- [b] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e não negativa. Então
$$\left(\int_a^b f(x)\cos(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$
- [c] Seja $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ contínua. Se existir $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x))^n dx = L \in \mathbb{R}$, então $f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$.
- [d] Sejam $c > 0$ e $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ derivável. Se $cf(x) + f'(x) \leq 0$ para todo x, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- [e] Seja $f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ contínua tal que $\int_0^\infty f(x)dx$ é convergente. Então $\int_0^\infty (f(x))^2 dx$ é convergente.

Questão 3 Seja (a_n) uma sequência de números reais tal que $|a_n - 1| \leq 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere a série de potências centrada em 0 dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

e indique a afirmação **falsa**.

a) Esta série de potências não converge em $x = -1$.

b) O raio de convergência desta série é 1.

c) Existe uma função derivável $g(x)$ em $[-0.5, 0.5]$ de modo que $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + g(x)$ para todo x em $[-0.5, 0.5]$.

d) $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$.

e) $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$.

Questão 4 Considere o conjunto S de todos os números reais $x \in [0, 1]$ que têm uma expansão decimal da forma

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots$$

onde todos os dígitos d_i estão no conjunto $\{0, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Indique a afirmação **falsa**.

a) S é um conjunto fechado.

b) Há uma bijeção entre S e $[0, 1]$.

c) Se A é um aberto de $\mathbb{R}$ tal que $A \cap S \neq \emptyset$, então $A \cap S$ é não enumerável.

d) Existe um intervalo aberto não vazio inteiramente contido em S.

e) S possui infinitos elementos que são números racionais.

Questão 5 Seja $x_0, x_1, x_2, \ldots$ uma sequência convergente de números reais tal que para todo n

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} + x_n - \frac{1}{2}.$$

Seja L o limite desta sequência. Indique a afirmação **falsa**.

a) $L \in \{-1, 1\}$.

b) Se $L = -1$, então existe n_0 tal que $x_n = -1$ para todo $n \geq n_0$.

c) Existem $\lambda \in (0,1)$ e $C > 0$ tais que para todo n

$$|L - x_n| \leq C\lambda^n.$$

d) Se $L = 1$, então existe n_0 tal que $x_n = 1$ para todo $n \geq n_0$.

e) Existem dois valores de x_0, digamos a e b, tais que as sequências definidas a partir de $x_0 = a$ e $x_0 = b$ são não-constantes, o limite da sequência começando em a é -1, e o limite da sequência começando em b é 1.

Questão 6 Seja $V = \mathbb{R}[t]$ o espaço vetorial real das funções polinomiais $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seja $D : V \to V$ o operador derivação, $D(p)(t) = p'(t)$, e seja $T : V \to V$ o operador definido por $T(p)(t) = tp(t)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) D é sobrejetor.

(II) D é injetor.

(III) T é sobrejetor.

(IV) T é injetor.

(V) $\ker(D) = \{p \in V \ : \ p(0) = 0\}$.

(VI) $\mathrm{Im}(T) = \{p \in V \ : \ p(0) = 0\}$.

Dentre as alternativas abaixo, assinale a **correta**:

a) (I), (III) e (IV) são verdadeiras.

b) (II), (III) e (V) são falsas.

c) (I), (V) e (VI) são verdadeiras.

d) (II), (V) e (VI) são falsas.

e) (II), (III) e (IV) são verdadeiras.

Questão 7 Seja A uma matriz real de ordem $n > 1$ com n autovalores distintos. Seja $B \neq I_n$ uma matriz que comuta com A, onde I_n representa a matriz identidade de ordem n. Considere as seguintes afirmações:

(I) B tem os mesmos autovalores de A.

(II) Todos os autovetores de A são autovetores de B.

(III) B tem autovalor nulo se A tem autovalor nulo.

(IV) A forma de Jordan de B é uma matriz diagonal.

(V) O produto AB não é diagonalizável.

Dentre as alternativas abaixo, assinale a **correta**:

- [a] (I), (II) e (IV) são verdadeiras e as demais são falsas.
- [b] (II), (III) e (V) são verdadeiras e as demais são falsas.
- [c] (I) e (IV) são verdadeiras e as demais são falsas.
- [d] (II) e (IV) são verdadeiras e as demais são falsas.
- [e] (III) e (V) são verdadeiras e as demais são falsas.

Questão 8 Seja V o $\mathbb{R}$-espaço vetorial formado por todas as sequências numéricas da forma $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ com $a_i \in \mathbb{R}$. A adição e a multiplicação por escalar são definidas termo a termo, isto é, $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ e $r(a_0, a_1, a_2, \dots) := (ra_0, ra_1, ra_2, \dots)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Definimos

$$W := \big\{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in V \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ para todo natural } n \geq 0\big\}.$$

Seja $\phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. A seguinte afirmação é **correta**:

- [a] W é um subespaço vetorial de V e possui dimensão finita. Os vetores $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ e $v_2 := \big(1, 1 - \phi, (1 - \phi)^2, (1 - \phi)^3, \dots\big)$ pertencem a W e são linearmente independentes, mas não geram W.
- [b] W é um subespaço vetorial de V e possui dimensão finita. Os vetores $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ e $v_2 := \big(1, 1 - \phi, (1 - \phi)^2, (1 - \phi)^3, \dots\big)$ pertencem a W e constituem uma base para W.
- [c] W é um subespaço vetorial de V e possui dimensão finita. Os vetores $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ e $v_2 := \big(1, 1 - \phi, (1 - \phi)^2, (1 - \phi)^3, \dots\big)$ não pertencem a W.
- [d] W é um subespaço vetorial de V e possui dimensão infinita.
- [e] W não é um subespaço vetorial de V.

Questão 9 Seja P_n o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$. Introduzimos um produto interno em P_n através da fórmula

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad p, q \in P_n.$$

Seja $T : P_n \to P_n$ o operador linear definido por $T(p)(t) := \big((1-t^2)p'(t)\big)'$ para $p \in P_n$ e seja $r_j(t) := \frac{d^j}{dt^j}(1-t^2)^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. O polinômio $r_j(t)$ satisfaz a equação diferencial $(1-t^2)r_j''(t) - 2tr_j'(t) + j(j+1)r_j = 0$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) O operador T é auto-adjunto.

(II) Para $i \neq j$, $\langle r_i, r_j\rangle = 0$.

(III) $r_0, \ldots, r_n$ formam uma base para P_n.

(IV) O complemento ortogonal de P_{k-1} em P_k é gerado por r_k para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Podemos afirmar que

[a] (I) e (III) são corretas mas (II) e (IV) são incorretas.

[b] (I) e (II) são corretas mas (III) e (IV) são incorretas.

[c] (II) e (III) são corretas mas (I) e (IV) são incorretas.

[d] (I) e (IV) são corretas mas (II) e (III) são incorretas.

[e] Todas as alternativas são corretas.

Questão 10 Uma *sequência exata* de espaços vetoriais V_i de dimensão finita

$$0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} V_4 \xrightarrow{T_4} 0$$

é uma sequência de transformações lineares T_i tais que $\ker T_{i+1} = \operatorname{im} T_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ (denotamos por 0 o espaço vetorial nulo). Se na sequência exata acima $\dim V_i = d_i$, então é sempre verdade que

[a] $d_1 = d_2 + d_3 + d_4$.

[b] $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

[c] $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$.

[d] $d_4 = d_1 + d_2 + d_3$.

[e] $d_1 + d_2 \geq d_3 + d_4$.

Questão 11 Considere os seguinte ideais de $\mathbb{Z}[X]$: $I = \langle X^2 - 2 \rangle$, $J = \langle 7, X^2 + 1 \rangle$ e $K = \langle X^2 - 3, 5 \rangle$. Assinale a alternativa **correta**.

- [a] I e K são maximais e J não é primo.
- [b] K é primo, mas I e J não são primos.
- [c] I é primo, K é maximal e J não é primo.
- [d] Nenhum dos ideais é maximal.
- [e] Todos os ideais são primos.

Questão 12 Seja S_n o grupo simétrico em n letras. Assinale a alternativa **incorreta**.

- [a] Todo $\sigma \in S_n$ dado por um ciclo de tamanho ímpar é uma permutação par.
- [b] Seja $\sigma \in S_n$ um ciclo de tamanho k. Se k e m são coprimos, então σ^m é um ciclo de tamanho k.
- [c] Quaisquer dois ciclos do mesmo tamanho em S_n são conjugados.
- [d] O grupo de automorfismos de A_n não tem subgrupo isomorfo à S_n.
- [e] Para $n \geq 5$, A_n é o único subgrupo normal não trivial de S_n.

Questão 13 Seja D_n o grupo diedral de ordem $2n$, onde $n \geq 3$. Assinale a alternativa **incorreta**.

- [a] Existe um monomorfismo de D_n em S_n.
- [b] Se n é par, então $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ é isomorfo a um subgrupo de D_n.
- [c] D_n tem um subgrupo normal de ordem 2.
- [d] D_n tem um subgrupo normal de ordem n.
- [e] D_n é gerado por dois elementos de ordem 2.

Questão 14 Seja G um grupo e considere as seguinte afirmações:

(I) Se $H \leq G$ e $K \trianglelefteq G$, então $HK \trianglelefteq G$.

(II) Se S é subconjunto de G, então $C_G(S) = C_G(C_G(C_G(S)))$. Aqui $C_G(X)$ representa o centralizador de X em G.

(III) Se M é subgrupo maximal de G, então $Z(G) \leq M$ ou $M \trianglelefteq G$.

(IV) $\mathrm{Aut}(G \times G) \simeq \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G)$.

(V) Se $H, K \trianglelefteq G$, então $G/(H \cap K)$ é isomorfo a um subgrupo de $G/H \times G/K$.

Assinale a alternativa onde todos os itens são verdadeiros.

a (I), (II), (V).

b (II), (III), (V).

c (I), (II), (III).

d (II), (III), (IV).

e (III), (IV), (V).

Questão 15 Assinale a alternativa **incorreta**.

a Se $K = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 11 \rangle}$, então o grupo multiplicativo de K é cíclico e tem 4 subgrupos.

b Existe um anel A para o qual o polinômio $p(x) = x^3 - x \in A[x]$ tem pelo menos 4 distintas raízes em A.

c O polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 10x + 2018$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

d Se $K = \mathbb{F}_{13}$ é o corpo finito de 13 elementos, então existe $p(x) \in K[x]$ de grau 3 para o qual $\#\{p(\alpha) : \alpha \in \mathbb{F}_{13}\} < 5$.

e Se $A[x]$ é domínio de ideais principais, então A é um corpo.

PROVA EXTRAMUROS - 2018

FOLHA DE RESPOSTAS

NOME: ____________________

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): ____________________

ASSINATURA: ____________________

As respostas das questões de múltipla escolha devem ser marcadas NESTA folha.
Respostas no caderno de questões NÃO serão consideradas!

Questão 1: a b c d e
Questão 2: a b c d e
Questão 3: a b c d e
Questão 4: a b c d e
Questão 5: a b c d e
Questão 6: a b c d e
Questão 7: a b c d e
Questão 8: a b c d e

Questão 9: a b c d e
Questão 10: a b c d e
Questão 11: a b c d e
Questão 12: a b c d e
Questão 13: a b c d e
Questão 14: a b c d e
Questão 15: a b c d e