EXAMEN EXTRAMUROS-DOCTORADO – 2018

Nombre: ______________________________

Identidad (pasaporte): ______________________________

Firma del candidato(a): ______________________________

Institución donde la prueba fue aplicada: ______________________________

OBSERVACIÓN: Esta prueba tiene duración de cinco (5) horas.

Pregunta 1. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(n \geq 2)$, funciones continuas. Suponga que el conjunto

$$\mathcal{C}_{f=g} := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) = g(x)\}$$

es acotado y no vacío. Considere los conjuntos

$$\mathcal{C}_{f\leq g} := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) \leq g(x)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{f\geq g} := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) \geq g(x)\}.$$

(a) Pruebe que uno de los conjuntos $\mathcal{C}_{f\leq g}$ o $\mathcal{C}_{f\geq g}$ es compacto.

(b) Pruebe que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0) \quad \text{o} \quad g(x) - g(x_0) \leq f(x) - f(x_0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Pregunta 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Además, suponga que

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Muestre que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|^2 \leq f(x) \leq \beta\|x\|^2, \quad \forall\, x \neq 0.$$

(b) Determine la imagen de f, justificando su respuesta.

(c) Diga si f é diferenciable en $x = 0$, justificando su respuesta.

Pregunta 3. Calcule o valor aproximado (con 4 casas decimales) para la solución de la ecuación

$$x^7 + 0,99x - 2,03 = 0,$$

dando una estimación para el error.

Pregunta 4. Sean $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 y $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tales que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ \Delta\phi = 0 \ \text{ en } \ B_1(0) \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot \nu = \nabla\phi \cdot \nu \ \text{ sobre } \ \partial B_1(0),$$

donde $B_1(0)$ es la bola abierta de radio 1, centrada en el origen, $\partial B_1(0)$ su frontera y ν es el vector normal unitario e exterior.

Muestre que

$$\int_{B_1(0)} \mathbf{u}(x) \cdot \nabla\phi(x)\, dx = \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(x)|^2\, dx$$

y concluya que

$$\int_{B_1(0)} |\mathbf{u}(x)|^2\, dx \geq \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(x)|^2\, dx.$$

Pregunta 5. Considere el rectángulo $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,2]$ y sea $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable, según Riemann en ese rectángulo.

(a) Enuncie el Teorema de Fubini para

$$I = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dxdy.$$

(b) Podemos aplicar el Teorema de Fubini para $f(x,y) = e^{xy}$? Justifique su respuesta.