PROVA EXTRAMUROS-DOUTORADO - 2017

Nome: ________________________________

Identidade (passaporte): ________________________________

Assinatura: ________________________________

Instituição onde a prova foi aplicada: ________________________________

OBSERVAÇÃO: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1. Sejam X e Y subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$. Mostre que se X é compacto e Y fechado, então $d(X,Y) > 0$, onde

$$d(X,Y) = \inf\big\{\|x-y\|\,;\, x \in X,\, y \in Y\big\}.$$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função de classe C^1 tal que $0 < f'(t) \leq 1$, para todo $t \in [0,1]$ e $f(0) = 0$. Mostre que

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \geq \int_0^1 f^3(t)\,dt.$$

Questão 3. Seja $N : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ satisfazendo

$$\begin{array}{ll} (i) & N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \\ (ii) & N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Definimos a bola unitária B associada a N por $B = \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, N(x) \leq 1\big\}$. Prove que N é uma norma se, e somente se, B é subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

Questão 4. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é p-homogênea se $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$, $\forall \lambda > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Se $\langle : \rangle$ denota o produto escalar usual, mostre que uma função diferenciável é p-homogênea se, e somente se, satisfaz a relação

$$\big\langle x : \nabla f(x)\big\rangle = p f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Questão 5. Seja G_n^+ o conjunto das matrizes reais simétricas e positivas de ordem n. Lembrando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2)\,dt = \sqrt{\pi/\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right) dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}, \quad \forall A \in G_n^+.$$