

PROVA EXTRAMUROS - 2016

NOME: _____

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): _____

ASSINATURA: _____

INSTRUÇÕES

- (i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.
 - (ii) A parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total.
-
-

BOA PROVA!

RESPOSTAS DA PARTE II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	
10		11		12	
13		14		15	

PARTE I: QUESTÕES DISSERTATIVAS

Questão 1. Considere a série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+n^2x^4}, \quad \alpha > 0.$$

- (i) Mostre que esta série converge pontualmente no intervalo $[0, \infty)$;
- (ii) Mostre que se $\alpha < 4$, a convergência é uniforme em $[a, \infty)$ qualquer que seja $a > 0$;
- (iii) Mostre que se $2 < \alpha \leq 4$, a convergência é uniforme em $[0, \infty)$.

Solução: Seja $f_k(x) = x^\alpha/(1+k^2x^4)$ e $S_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x)$.

(1) Como $f_k(0) = 0$ para todo $k \geq 0$ e $0 < f_k(x) \leq x^{\alpha-4}/k^2$ para todo $k \geq 1$, conclui-se pelo teste da comparação que a série $S_n(x)$ converge pontualmente em $[0, \infty)$.

(2) Se $\alpha < 4$ e $x \geq a > 0$, então $f_k(x) \leq a^{\alpha-4}/k^2$. Logo, pelo teste M de Weierstrass, a série $S_n(x)$ converge uniformemente no intervalo $[a, \infty)$.

(3) Se $\alpha = 4$, tem-se f_k estritamente crescente e $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = 1/k^2$. Por outro lado, se $2 < \alpha < 4$,

$$\max\{f_k(x); x \in [0, \infty)\} = C_k \frac{1}{k^{\alpha/2}},$$

onde

$$C_k = \frac{\alpha^{\alpha/4}(4-\alpha)}{4(4-\alpha)^{\alpha/4}}.$$

Em ambos os caso, o resultado segue do Teste M de Weierstrass.

Questão 2. Seja $\mu(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algum } n\}$. Mostre que os grupos $(\mu(\mathbb{C}), \cdot)$ e $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ são isomorfos.

Answer.

For $z \in \mu(\mathbb{C})$, let n be a natural number such that $z^n = 1$. Then $|z| = 1$ and hence $z = e^{2\pi i k/n}$ for some $k \in \mathbb{N}$. Note that if $n|k$, then $z = 1$.

Now define

$$\varphi : \mu(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad z = e^{2\pi i k/n} \mapsto \overline{k/n}.$$

First we verify that φ is a homomorphism. If $y^m = 1$ and $z^n = 1$, then $y^{mn} = z^{mn} = 1$ and so $y = e^{2\pi i k/mn}$ and $z = e^{2\pi i l/mn}$ for some $k, l \in \mathbb{N}$.

Thus

$$\varphi(yz) = \varphi(e^{2\pi i(k+l)/mn}) = \overline{(k+l)/mn} = \overline{k/mn} + \overline{l/mn} = \varphi(y) + \varphi(z).$$

Moreover if $\varphi(z) = \varphi(e^{2\pi i l/n}) = \overline{l/n} = 0$, then $l/n \in \mathbb{Z}$ and so $n|l$. This implies that $z = 1$ and so φ is injective.

If $\overline{p/q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, then we may assume that $p, q \in \mathbb{N}$. Now clearly $\varphi(e^{2\pi i p/q}) = \overline{p/q}$ and thus φ is surjective too. Therefore φ is an isomorphism.

PARTE II: QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$f''(x) + xf'(x) = \cos(x^3 f'(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (i) Se f admitir um ponto crítico x_0 , então x_0 será ponto de mínimo local.
- (ii) $\exists r > 0$ tal que f tem concavidade para cima em $(-r, r)$.
- (iii) f poderá admitir no máximo um ponto crítico.
- (iv) f é uma função ímpar.
- (v) A equação $f(x) = 0$ tem no máximo duas raízes.

Sobre as afirmações anteriores é correto dizer que:

- (a) Somente (i) e (ii) são verdadeiras.
- (b) Somente (i) e (iii) são verdadeira.
- (c) Somente (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.
- (d) Somente (i), (ii), (iii) e (v) são verdadeiras.
- (e) Todas são verdadeiras.

Solução: (i) Teste da concavidade.

(ii) Pois f'' é contínua e $f''(0) = 1$ (+ teste da segunda derivada).

(iii) Se a função tem dois mínimos locais estritos então ela também possui um máximo local.

(iv) é falso.

(v) Se $f(x) = 0$ possuir três raízes então $f'(x) = 0$ terá no mínimo duas raízes (o que não pode ocorrer por (iii)).

Resposta (d)

Questão 2. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e Riemann integrável e considere $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \int_0^x f(s)ds$. Sobre as afirmações:

- (i) Existe $C > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$ para todo $x, y \in [0, 1]$.
- (ii) Se f for contínua em $a \in [0, 1]$ então g será derivável em a .
- (iii) Suponha que f tenha descontinuidade removível em $a \in (0, 1)$, i.e., $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Então g é derivável em a .
- (iv) Suponha que f tenha uma descontinuidade do tipo salto em $a \in (0, 1)$, i.e., $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. É possível que g seja derivável em a .
- (v) Se $f \geq 0$ então existe $C > 0$ tal que $g(x) \geq Cf(x)$ para todo $x \in [0, 1]$.

é correto dizer que:

- (a) Somente (i) é verdadeira.
- (b) Somente (i) e (ii) são verdadeiras.
- (c) Somente (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.
- (d) Somente (i), (ii), (iii) e (iv) são verdadeiras.
- (e) Todas são verdadeiras.

Resposta: (c)

Questão 3. Escolha a alternativa errada.

- (a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 7$. Então f tem ao menos um ponto crítico.
- (b) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto de forma que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in K$. Então existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ para todo $x, y \in K$.
- (c) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Então existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ para todo $x, y \in K$.
- (d) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em 0 tal que $f'(0) \neq 1$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [-\epsilon, \epsilon] \setminus \{0\}$.
- (e) Sejam $f, g, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Se f e h são deriváveis em $c \in (a, b)$, $f(c) = h(c)$ e $f'(c) = h'(c)$, então g é derivável em c e $g'(c) = f'(c)$.

Resposta: (b)

Questão 4. Escolha a alternativa errada.

- (a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = a$.
- (b) Seja (a_n) uma sequência de números positivos tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} < \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n^2} = 0$.
- (c) Se $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, b]$ e $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ são tais que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, então $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n \in [a, b]$.
- (d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- (e) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$.

Resposta: (d)

Questão 5. Escolha a alternativa errada.

- (a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 e suponha que $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ seja seu polinômio de Taylor de ordem 4 em torno de $x = 1$. Então f tem um mínimo local em $x = 1$.
- (b) Seja $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ derivável com $f(0) = 0$. Se o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)}$ existe então vale zero.
- (c) Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então $\int_0^{2\pi} \cos(nx)f(x)dx \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (d) Se $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, então $\int_0^{2\pi} [\cos^+(nx) + \text{sen}^+(nx)] dx \rightarrow 4\pi$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x^e)^{1/x} = e$.

Resposta: (d)

Questão 6. Considere uma matriz real simétrica A de ordem 3 com determinante igual a 6. Suponha que $u = (4, 8, -1)$ e $v = (1, 0, 4)$ sejam autovetores desta matriz associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

- (i) Os autovalores de A são apenas 1 e 2.
- (ii) O produto vetorial $u \times v$ é necessariamente autovetor de A .
- (iii) O vetor $(5, 8, 3)$ é autovetor de A .
- (iv) A pode não ser diagonalizável.

Então, podemos afirmar que

- (a) As afirmações (i) e (ii) são verdadeiras, (iii) e (iv) são falsas
- (b) As afirmações (ii), (iii) são verdadeiras, (i) e (iv) são falsas
- (c) As afirmações (iii), (iv) são verdadeiras e (i) e (ii) são falsas
- (d) A afirmação (ii) é verdadeira e as demais são falsas
- (e) Todas as afirmações de (i) a (iv) são verdadeiras

Solução: (Teorema Espectral) (I) F. O produto dos autovalores é 6. Então o 3o. autovalor resulta em 3. (II) V. A matriz é simétrica, então os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. A 3a direção é portanto a do produto vetorial dos vetores dados. (III) F. Este vetor é a soma de dois autovetores associados a autovalores distintos. (IV) F. A é simétrica e portanto diagonalizável.

Resposta: (d)

Questão 7. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{F} e $T : U \rightarrow V$ transformação linear. Se V é espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, considere a função $(\cdot, \cdot) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $(u_1, u_2) = \langle T(u_1), T(u_2) \rangle$, para todo $u_1, u_2 \in U$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

- (a) (\cdot, \cdot) é um produto interno de U somente se T for um isomorfismo
- (b) (\cdot, \cdot) é um produto interno de U somente se T for uma isometria
- (c) (\cdot, \cdot) é um produto interno de U se T é injetora
- (d) (\cdot, \cdot) é um produto interno de U se T é sobrejetora
- (e) (\cdot, \cdot) é um produto interno de U se T é operador auto-adjunto

Resposta: (c)

Questão 8. Para V espaço vetorial real de dimensão finita, uma involução em V é um operador linear $\varphi : V \rightarrow V$ tal que $\varphi^2 = I$, ou seja, $\varphi(\varphi(x)) = x$ para todo $x \in V$. Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, sejam $\text{Fix}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$ e $\mathcal{A}(T) = \{x \in V : T(x) = -x\}$, chamados subespaço de pontos fixos de T e subespaço antipodal de T , respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

- (i) Se φ é uma involução, então $\det(\varphi) = 1$
- (ii) $\text{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \ker(\varphi_1 - \varphi_2)$
- (iii) Se λ é autovalor de uma involução, então $\lambda = \pm 1$
- (iv) Se φ_1, φ_2 são involuções, então $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é também uma involução
- (v) $\mathcal{A}(\varphi) = \text{Im}(I - \varphi)$

Assinale a afirmativa correta:

- (a) Apenas (i), (ii), (iii) são verdadeiras
- (b) Apenas (iii), (v) são verdadeiras
- (c) Apenas (i) e (iv) são falsas
- (d) Apenas (ii) (iii), (iv) são verdadeiras
- (e) Apenas (iii) é falsa

Resposta: (c)

Questão 9. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} dos números complexos. Denotamos por $I : V \rightarrow V$ a transformação identidade. Se o polinômio característico de uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ é $x^2 - x - 1$, então é correto afirmar que:

- (a) T é inversível e $T^{-1} = T - I$.
- (b) T não é necessariamente inversível.
- (c) T é inversível e $T^{-1} = T + I$.
- (d) Não existe T com tal polinômio característico.
- (e) T é inversível, mas nenhuma das fórmulas para a inversa de T nos outros itens é válida.

Resposta: (a)

Questão 10. Dizemos que dois espaços vetoriais são *naturalmente* isomorfos quando é possível exibir um isomorfismo entre tais espaços sem realizar uma escolha de bases. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo \mathbb{R} dos números reais. Assinale a alternativa incorreta:

- (a) Os espaços V e $(V^*)^*$ são naturalmente isomorfos. Aqui $V^* = \text{Lin}(V, \mathbb{R})$ e $(V^*)^* = \text{Lin}(V^*, \mathbb{R})$.
- (b) Suponha V munido de um produto interno e seja $0 \neq p \in V$. Então os espaços $V/\mathbb{R}p$ e $p^\perp := \{v \in V \mid \langle v, p \rangle = 0\}$ são naturalmente isomorfos. Aqui $\mathbb{R}p = \{tp; t \in \mathbb{R}\}$.
- (c) Os espaços V e V^* não são naturalmente isomorfos mesmo no caso em que V está munido de um produto interno.
- (d) Se V e W possuem a mesma dimensão, então são isomorfos.
- (e) Se V e W possuem a mesma dimensão, os espaços vetoriais reais $\text{Lin}(V, W)$ e $\text{Lin}(V, V)$ são isomorfos. (Denotamos por $\text{Lin}(V, W)$ o espaço vetorial real das aplicações lineares de V em W)

Resposta: (c)

Questão 11. Seja R^\times o grupo de todos os elementos invertíveis de um anel comutativo R . Se $R := \mathbb{Z}/2p^n\mathbb{Z}$, onde p é um número primo diferente de 2 e $n \geq 2$, então a ordem de R^\times é

(a) $(p-1)p^{n-1}$ (**Resposta certa**)

(b) $2(p-1)p^{n-1}$

(c) $2p^{n-1}$

(d) p^{n-1}

(e) $(p-1)^{n-1}$

Questão 12. Seja $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$ o seguinte subgrupo aditivo de \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right] := \left\{ \frac{a}{7^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Claramente \mathbb{Z} é um subgrupo de $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$. É correto afirmar que:

- (a) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo finito com 7 elementos
- (b) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo finito com mais de 7 elementos
- (c) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo infinito e cada elemento dele é de ordem 7
- (d) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo infinito e cada elemento dele é de ordem finita (**Resposta certa**)
- (e) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo infinito e tem, pelo menos, um elemento de ordem infinita

Questão 13. Seja $\mathbb{Z}[X]$ o anel dos polinômios com coeficientes inteiros. Considere as seguintes informações:

- (i) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_0 \equiv 0 \pmod{3}\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$
(**verdadeira**)
- (ii) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_2 \equiv 0 \pmod{3}\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$
- (iii) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$ (**verdadeira**)
- (iv) $\mathbb{Z}[X^2] = \{a_0 + a_2X^2 + \cdots + a_{2n}X^{2n} \in \mathbb{Z}[X]\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$
- (v) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : \sum_{i=0}^n a_i = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$
(**verdadeira**)
- (vi) $\{P(X) \in \mathbb{Z}[X] : P'(0) = 0\}$ (onde P' é a derivada de P) é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$

Assinale a alternativa correta:

- (a) Apenas (i) e (v) são verdadeiras
- (b) Apenas (iii) e (v) são verdadeiras
- (c) Apenas (iv) e (vi) são verdadeiras
- (d) Apenas (i) e (ii) são verdadeiras
- (e) Apenas (i), (iii) e (v) são verdadeiras (**Resposta certa**)

Questão 14. Seja p um número primo. Seja $\mathbf{C}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ um anel com adição e multiplicação definidas como

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d), \quad (a, b) \circ (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

É correto afirmar que:

- (a) \mathbf{C}_p é um corpo para qualquer número primo p
- (b) \mathbf{C}_p não é um corpo para todo número primo p
- (c) \mathbf{C}_2 não é um corpo, mas \mathbf{C}_p é um corpo para qualquer outro número primo p
- (d) \mathbf{C}_2 é um corpo e \mathbf{C}_p não é um corpo para algum número primo ímpar p
- (e) \mathbf{C}_2 não é um corpo e \mathbf{C}_p é um corpo para algum número primo ímpar p (**Resposta certa**)

Questão 15. Seja $A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

- (i) $A[X]$ é domínio de integridade (**verdadeira**)
- (ii) $A[X]$ é anel de ideais principais (**verdadeira**)
- (iii) $A[X]$ é anel euclidiano (**verdadeira**)
- (iv) $X^2 + 1$ é irredutível em $A[X]$
- (v) $X^2 - 2$ é irredutível em $A[X]$ (**verdadeira**)

Assinale a afirmativa correta:

- (a) Apenas (i), (ii) e (iii) são verdadeiras
- (b) Apenas (iii) e (v) são verdadeiras
- (c) Apenas (iv) e (v) são verdadeiras
- (d) Apenas (ii), (iii) e (v) são verdadeiras
- (e) Apenas (iv) é falsa (**Resposta certa**)